ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΝ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΑΓΩΓΩΝ

1.1 Γενικά

Ως ανοικτός αγωγός εννοείται εις αγωγός εις τον οποίον το ύδωρ ρέει με ελευθέραν την επιφάνειάν του. Εν αντιθέσει προς τους κλειστούς αγωγούς, όπου η διατομή της ροής καθορίζεται πλήρως υπό των στερεών επιφανειών, η διατομή της ροής των ανοικτών αγωγών δύναται να μεταβάλλεται ελευθέρως. Ως αποτέλεσμα, αι συνθήκαι αι οποίαι ελέγχουν την ροήν είναι διαφορετικαί εκείνων αι οποίαι κυβερνούν την ροήν εντός των κλειστών αγωγών. Εις γενικάς γραμμάς η ροή του ύδατος με ελευθέραν επιφάνειαν είναι πολυπλοκωτέρα της ροής εντός κλειστών αγωγών. Ροή με ελευθέραν επιφάνειαν εμφανίζεται εις ανοικτούς αγωγούς όπου η ελεύθερη αύτη επιφάνεια υπόκειται συνήθως (μόνιμος ροή) μόνον εις ατμοσφαιρικήν πίεσιν. Επειδή λοιπόν η πίεσις είναι σταθερά, η ροή προκαλείται από το ίδιον βάρος του ρευστού.

Παραδείγματα ανοικτών αγωγών αποτελούν οι ποταμοί, αι τεχνηταί διώρυγαι (channels), οι κλειστοί αγωγοί οι οποίοι δεν είναι πεπληρωμένοι εξ υγρών κλπ. Εις τας πλείστας των περιπτώσεων η ροή των υγρών των ανοικτών αγωγών αναφέρεται εις την ροήν ύδατος. Όλα τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα εις ανοικτούς αγωγούς αναφέρονται προς το ύδωρ με κανονικήν θερμοκρασίαν και πίεσιν. Ακόμη και άν υποτεθή ότι η ροή είναι σταθερά και ομοιόμορφος και πάλιν η λύσις των προβλημάτων των ανοικτών αγωγών είναι δυσκολωτέρα απ΄ ότι η λύσις των προβλημάτων των κλειστών αγωγών. Ενώ δε οι περισσότεροι των κλειστών αγωγών είναι κυκλικής διατομής, εις τους ανοικτούς αγωγούς αι διατομαί ποικίλλουν εκ των πλέον απλών γεωμετρικών σχημάτων μέχρις των τελείως ακανονίστου σχήματος διατομών των ποταμών. Επίσης, υπάρχει μεγάλη ανομοιομορφία εις τας στερεάς επιφανείας των ανοικτών αγωγών αι οποίαι ποικίλλουν εκ της λείας επιφανείας των ξύλινων κατασκευών μέχρις της πετρώδους και ανωμάλου επιφανείας του πυθμένος των ποταμών. Ούτως, η εκλογή ενός καταλλήλου συντελεστού τριβής διά την περίπτωσιν των ανοικτών αγωγών είναι αρκετά δύσκολος, εν συγκρίσει βεβαίως προς την αντίστοιχον εκλογήν διά κλειστούς αγωγούς. Επίσης και λόγω της ελευθέρας επιφανείας του ύδατος, δύναται να εμφανισθούν και άλλα φυσικά φαινόμενα τα οποία επί της ουσίας δυνατόν να διαφοροποιήσουν την όλην συμπεριφοράν της ροής.

1.2 Ορισμοί

Τα ρευστά είναι υλικά σώματα χωρίς ειδικόν των σχήμα και υπόκεινται εις μεγάλας παραμορφώσεις της γεωμετρίας των όταν ευρίσκονται υπό την επίδρασιν δυνάμεων. Ρευστά είναι τα υγρά και τα αέρια. Η κίνησίς των γνωστή ως ροή μελετάται υπό της επιστήμης της Μηχανικής των Ρευστών. Τα υγρά καταλαμβάνουν καθορισμένον όγκον και σχετικώς είναι ***ασυμπίεστα***. Τα αέρια καταλαμβάνουν τον μέγιστον διαθέσιμον προς αυτούς όγκον και είναι ***συμπιεστά***. Όταν όμως η ταχύτης των αερίων είναι σχετικώς μικρά (< 60.0 m/s) η ροή αυτών είναι ασυμπίεστος και αι εξισώσεις αι διέπουσαι την ροήν είναι ιδίαι αυτών των υγρών.

Εις όλον το παρόν σύγγραμμα χρησιμοποιείται το Διεθνές Σύστημα μονάδων SI (Systeme International). Αι βασικαί μονάδαι αι αφορώσαι την Υδραυλικήν Ανοικτών αγωγών είναι:

μήκος	μέτρον	*(m)*
μάζα	χιλιόγραμμον	*(kg)*
χρόνος	δευτερόλεπτον	*(s)*
θερμοκρασία	Κέλβιν	^oK

Η σχέσις μεταξύ βαθμών *Κέλβιν* (^oK) και *Κελσίου* (^oC) δίδει,

$$^oK = {}^oC + 273.15 \quad \textbf{(1.1)}$$

Μεταξύ της ***μάζης*** *m (kg)* και του ***βάρους*** *B (N)* ενός σώματος ρευστού υφίσταται η εξίσωσις,

$$B = mg \quad \textbf{(1.2)}$$

όπου $g(m/s^2)$ είναι η ***επιτάχυνσις της βαρύτητος***. Συνήθης τιμή αυτής περί τα Ελληνικά γεωγραφικά πλάτη είναι $9.807\ (m/s^2)$.

Πυκνότης $\rho(kg/m^3)$ είναι η μάζα του ρευστού η περιεχομένη εις την μονάδαν του όγκου του $V(m^3)$. Είναι,

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \textbf{(1.3)}$$

Η πυκνότης του καθαρού ύδατος εις τους 4^oC είναι $1000.0\ kg/m^3$, ενώ εις τους 20^oC είναι $998.2\ kg/m^3$. ***Ειδικόν βάρος*** $\gamma(N/m^3)$ είναι η δύναμις η οποία δρά επί της μάζης του υλικού του περιεχομένου εις την μονάδαν όγκου. Είναι,

$$\gamma = \rho g \tag{1.4}$$

Ιξώδες *μ (kg/ms)* είναι η παράμετρος η οποία παριστά την ύπαρξιν εφαπτομενικών δυνάμεων επί του ρευστού κατά την κίνησίν του. Διά στρωτήν ροήν, ιδέ και Κεφάλαιον 2, ισχύει,

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{1.5}$$

ή

$$\mu = \frac{\tau}{du/dy} = \frac{\text{διατμητική τάσις}}{\text{κλίσις διατμητικήςεπιμηκίνσεως}} \tag{1.6}$$

ένθα τ *(N/m²)* η ***διατμητική τάσις*** και du/dy η ***κλίσις των ταχυτήτων*** (μεταβολή της ταχύτητος προς την απόστασιν *y (m)*). Τα ρευστά τα οποία υπακούουν εις την εξίσωσιν (1.5) ονομάζονται ***Νευτώνια ρευστά***. Εάν το ιξώδες του ρευστού είναι συνάρτησις της ταχύτητός του τότε η εξίσωσις της διατμητικής τάσεως εις την οποίαν υπακούουν τα ρευστά είναι μή-γραμμική και τα ρευστά αυτά ονομάζοντα ***μή-Νευτώνια ρευστά.*** Εις τους 10^oC και υπό ατμοσφαιρικήν πίεσιν η τιμή του ιξώδους του καθαρού ύδατος *μ (kg/ms)* είναι $1315x10^{-6}$ ενώ εις τους 20^oC και επίσης υπό την ατμοσφαιρικήν πίεσιν η τιμή του ιξώδους του καθαρού ύδατος πίπτει εις τους $1010x10^{-6}$*(kg/ms)*. ***Το κινηματικόν ιξώδες*** *ν (m²/s)* είναι ο λόγος του ιξώδους του ρευστού προς την πυκνότητάν του. Είναι,

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{1.7}$$

Εις τους 10^oC και εις τους 20^oC υπό ατμοσφαιρικήν πίεσιν η τιμή του κινηματικού ιξώδους του καθαρού ύδατος *ν (m²/s)* είναι $1.31x10^{-6}$ και $1.01x10^{-6}$, αντιστοίχως. Το κινηματικόν ιξώδες μεταβάλλεται εντόνως μετά της θερμοκρασίας. Αναλυτικοί πίνακες, ιδέ Lencastre (1987) δίδουν τας φυσικάς ιδιότητας του καθαρού ύδατος και του αέρος. Παρουσιάζονται επίσης πίνακες διαφόρου αλατότητος ύδατος.

Η ***δύναμις*** *F(N)* περιγράφεται υπό του δευτέρου νόμου της κινήσεως του Νεύτωνος και συνοψίζεται ως,

$$F = m\gamma \tag{1.8}$$

ένθα $\gamma(m/s^2)$ η ***επιτάχυνσις του ρευστού. Στατική πίεσις ή πίεσις*** $p(N/m^2)$ είναι η δύναμις η ασκουμένη επί της μονάδος επιφανείας *A*. Είναι,

$$p = \frac{F}{A} \tag{1.9}$$

Η πίεσις μετρείται εις N/m^2 ή εις *bar* και είναι $1.0\ bar = 100000.0\ N/m^2$. Η πίεσις αναφέρεται ως προς μεν την ατμοσφαιρικήν πίεσιν οπότε ονομάζεται ***σχετική πίεσις***, ως προς δε το απόλυτον κενόν οπότε ονομάζεται ***απόλυτος πίεσις***. Εις την Υδραυλικήν Μηχανικήν η πίεσις μετρείται εις μονάδας ύψους στήλης ύδατος. Εάν θεωρηθή ύδωρ εν ακινησία ύψους *h (m)* τότε η ασκουμένη πίεσις *p* είναι,

$$p = \rho g h \tag{1.10}$$

άρα,

$$h = \frac{p}{\rho g} \tag{1.11}$$

Επί παραδείγματι πίεσις *4000.0* N/m^2 ισούται προς *0.4079 m ύδατος*, διότι ρ*=1000.0* kg/m^3 και *g=9.807* m/s^2. Να αναφερθή ότι η ατμοσφαιρική πίεσις επί της επιφανείας της θαλάσσης είναι,

$$p_{\alpha\tau\mu} 101325 N/m^2 = 760\, mm\ \ Hg = 10.33 m\ \acute{\upsilon}\delta\alpha\tau o\varsigma \qquad \textbf{(1.12)}$$

Εις τα *340.0 m* υψόμετρον η ατμοσφαιρική πίεσις πίπτει εις τα *97320.0* N/m^2*(=9.92 m ύδατος)* και εις τα *1045.0 m* η ατμοσφαιρική πίεσις δίδει *89370.0* N/m^2*(=9.11 m ύδατος)*.

1.3 Διάρθρωσις ύλης

Το πρώτον αναφέρονται τα είδη ροής εις ανοικτούς αγωγούς, Κεφάλαιον 2 και ακολούθως αποδεικνύεται η ενεργειακή εξίσωσις του Bernoulli, Κεφάλιον 3. Αναλύεται η σταθερά ομοιόμορφος ροή, Κεφάλαιον 4. Αναφέρονται αι θεωρίαι περί οριακών στρωμάτων, Κεφάλαιον 5 και αι θεωρίαι περί μεγίστων παροχών ή ελαχίστης αντιστάσεως, Κεφάλαιον 6. Η ανάλυσις της κρισίμου συρτικής τάσεως δίδεται εις το Κεφάλαιον 7. Η ροή εντός αποχετευτικών αγωγών (μερικούς πληρώσεως) αναλύεται εις το Κεφάλαιον 8. Η θεωρία της ειδικής ενεργείας, κρισίμου ροής, εκχειλιστών ως επίσης και η εφαρμογή του ενεργειακού θεωρήματος εις τους ανοικτούς αγωγούς παρουσιάζεται αναλυτικώς εις το Κεφάλαιον 9. Η θεωρία της διατηρήσεως της ποσότητος κινήσεως (ορμής) και των σχετικών υδραυλικών αλμάτων αναφέρεται εις το Κεφάλαιον 10. Η βαθμιαίως μεταβαλλομένη ροή και τα είδη των ροών ελευθέρας επιφανείας αναφέρονται εις το Κεφάλαιον 11 ομού μετά του τρόπου υπολογισμού (πρώτα βήματα Υπολογιστικής Υδραυλικής) της καμπύλης ελευθέρας επιφανείας. Τέλος, η ασταθής ροή εις τους ταμιευτήρας (εκροή-ειροή) δίδεται εις το Κεφάλαιον 12. Πλείστα όσα προβλήματα Υδραυλικής επιλύονται πλέον διά της Υπολογιστικής Υδραυλικής Μηχανικής επιστήμης ήτις χρησιμοποιεί αριθμητικάς μεθόδους επιλύσεων των κανονικών και μερικών διαφορικών εξισώσεων αι οποίαι ελέγχουν την ροήν.

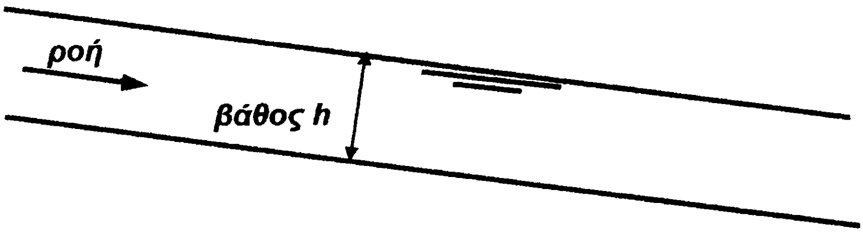
Μετά των σχετικών θεωριών περί ροής επιλύονται και προβλήματα προς εμπέδωσιν του γνωστικού αντικειμένου της ροής εντός ανοικτών αγωγών ή της ροής ελευθέρας επιφανείας ως αύτη είναι επίσης γνωστή εις την διεθνήν επιστημονικήν κοινότηταν. Διά την περαιτέρω κατανόησιν της ύλης ο αναγνώστης θα πρέπει να ανατρέξη εις την βιβλιογραφίαν του παρόντος συγγράμματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2

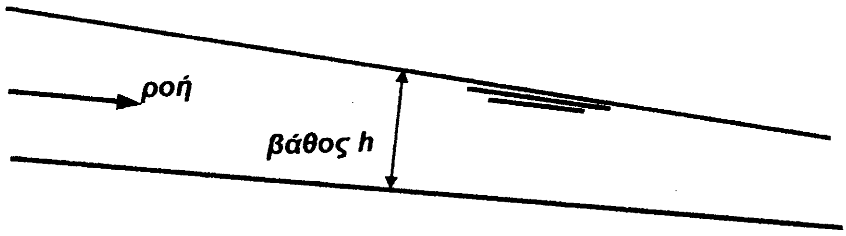
ΕΙΔΗ ΡΟΗΣ ΕΝΤΟΣ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΑΓΩΓΩΝ

Η ροή εις τους ανοικτούς αγωγούς δύναται να είναι ομοιόμορφος ή μή-ομοιόμορφος, σταθερά ή μή-σταθερά. Η ροή θεωρείται ότι είναι ***ομοιόμορφος*** εάν η ταχύτης του υγρού δεν αλλάζει είτε ως προς το μέγεθος είτε ως προς την διεύθυνσιν από μίαν διατομήν εις την επομένην, εις το υπό θεώρησιν τμήμα του ανοικτού αγωγού. Αυτή όμως η συνθήκη δύναται να ικανοποιηθή μόνον όταν η υγρά διατομή του ρευστού παραμένει αμετάβλητος κατά μήκος του αγωγού. Ως αποτέλεσμα, το βάθος του υγρού πρέπει επίσης να παραμείνη αμετάβλητον. Συνεπώς, η ομοιόμορφος ροή χαρακτηρίζεται εκ μίας υγράς επιφανείας η οποία είναι παράλληλος προς τον πυθμένα του ανοικτού αγωγού, ιδέ Σχήμα 2.1. Εις κάθε μίαν διατομήν κεχωρισμένως ή ταχύτης του υγρού δύναται να μεταβάλλεται λόγω π.χ. ιξωδών τάσεων, αλλά διά να χαρακτηρισθή η ροή ως ομοιόμορφος πρέπει η ταχύτης εις τα αντίστοιχα σημεία των διαφόρων διατομών να είναι η ιδία. Ροή της οποίας η υγρά επιφάνεια δεν είναι παράλληλος προς τον πυθμένα του ανοικτού αγωγού χαρακτηρίζεται ως ***ανομοιόμορφος ή μεταβαλλομένη***, ιδέ Σχήμα 2.2. Η αλλαγή του βάθους δύναται να πραγματοποιείται είτε βαθμιαίως είτε ταχέως και ούτως είναι πλέον σύνηθες φαινόμενον να ομιλή τις διά ***ταχέως μεταβαλλομένην ροήν*** και διά ***βαθμιαίως μεταβαλλομένην ροήν***. Πρέπει να σημειωθή ότι οι ανωτέρω χαρακτηρισμοί αναφέρονται διά τυχαίας μεταβολάς εκ μιάς διατομής εις την άλλην και ουχί διά μεταβολάς ως προς τον χρόνον. Είναι δυνατόν εις τμήμα του ανοικτού αγωγού να εμφανισθή ομοιόμορφος ροή και εις έν άλλον τμήμα του ιδίου αγωγού να εμφανισθή ανομοιόμορφος ροή, ιδέ Σχήμα 2.3.

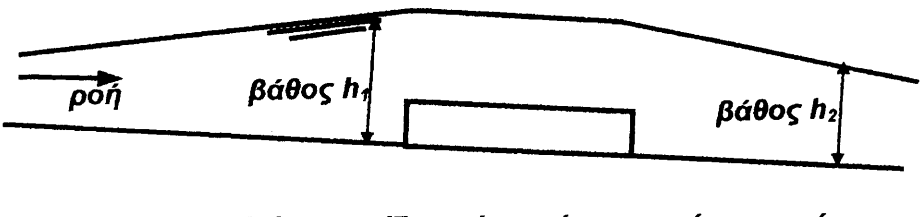
Η ροή δύναται να χαρακτηρισθή ως ***σταθερά*** ή ***μή-σταθερά*** με το αν η ταχύτης και κατά συνέπειαν το βάθος ροής εις έν επί μέρους σημείον του ανοικτού αγωγού μεταβάλλεται με τον χρόνον. Εις τα πλείστα των προβλημάτων ροής εντός των ανοικτών αγωγών η ροή θεωρείται ότι είναι προσεγγιστικώς σταθερά. Φυσικά υπάρχουν και προβλήματα μη-σταθεράς ροής, όπως π.χ. εις την περίπτωσιν των κυμάτων εμβολισμού (surge waves) όπου το βάθος ροής εις έν επί μέρους σημείον του ανοικτού αγωγού μεταβάλλεται αιφνιδίως καθώς το κύμα περνά εκ του πλησίον. Διά την αναλυτικήν μελέτην η πλέον πρόσφορος περίπτωσις είναι η σταθερά ομοιόμορφος ροή εις την οποίαν το βάθος του υγρού παραμένει αμετάβλητον και κατά μήκος του ανοικτού αγωγού αλλά και σχετικώς προς τον χρόνον. Εις τα Σχήματα 2.1 και 2.2. η κλίσις της επιφανείας του πυθμένος έχει επί τούτοις υπερεκτιμηθεί. Εις την πραγματικότηταν η κλίσις των ανοικτών αγωγών είναι πολύ μικρά της τάξεως του 0.001. Εις την πράξιν το είδος της συχνότερον εμφανιζομένης ροής είναι η ανομοιόμορφος παρά η ομοιόμορφος ροή. Αυτό είναι πλέον αληθοφανές εις μικρού μήκους ανοικτούς αγωγούς, διότι διά να αναπτυχθή η ροή εις ομοιόμορφον τοιαύτην χρειάζεται να προηγηθή αρκετό μήκος ανοικτού αγωγού όπου βεβαίως η ροή είναι ανομοιόμορφος. Πάντως το μεγαλύτερον μέρος της μελέτης των προκαταρκτικών μαθημάτων Υδραυλικής Μηχανικής αφιερούται εις την μελέτην της ομοιομόρφου ροής.



Σχήμα 2.1 Ομοιόμορφος ροή



Σχήμα 2.2 Μή-ομοιόμορφος ή μεταβαλλομένη ή ανομοιόμορφος ροή



Σχήμα 2.3 Διάφορα είδη ροής εντός ανοικτών αγωγών

Επί πλέον των όσων ανωτέρω ανεφέρθηκαν η ροή εντός των ανοικτών αγωγών, όπως ακριβώς και εις τους κλειστούς αγωγούς, δύναται να θεωρηθή ότι είναι είτε ***στρωτή*** είτε ***τυρβώδης***. Ποίον ακριβώς είδος ροής εμφανίζεται εν τη πραγματικότητι εξαρτάται κυρίως εκ του σχετικού μεγέθους των δυνάμεων αδρανείας (δηλ. της ταχύτητος) προς τας δυνάμεις ιξώδους δράσεως. Ο αριθμός ***Reynolds*** χρησιμοποιείται διά να προσδιορίση το είδος της εμφανιζόμενης ροής. Ο αριθμός ούτος, ***Re,*** ισούται προς,

$$Re = \frac{u\bar{h}\rho}{\mu} \tag{2.1}$$

ένθα u η ταχύτης του υγρού (m/s), μ το ιξώδες του υγρού (kg/ms), ρ η πυκνότης του υγρού (kg/m^3) και $\bar{h}$ είναι έν χαρακτηριστικόν μέγεθος (m) το οποίον εις τας πλείστας των περιπτώσεων είναι το υδραυλικόν μέσον βάθος ήτοι το πηλίκον,

$$\bar{h} = \frac{A}{B} \tag{2.2}$$

ένθα A η υγρά διατομή (m^2) και B το πλάτος της υγράς επιφανείας (m). Αριθμοί Reynolds μικρότεροι του 600.0 δεικνύουν ότι η ροή είναι στρωτή. Το 600.0 λοιπόν είναι η χαμηλωτέρα κρίσιμος τιμή του αριθμού Reynolds.

Τα προβλήματα των ανοικτών αγωγών τα έχοντα πρακτικόν ενδιαφέρον και εις τα οποία η ροή είναι στρωτή είναι ελάχιστα. Τα πλείστα των προβλημάτων με μηχανικάς εφαρμογάς έχουν μίαν πλήρως αναπτυγμένην τυρβώδην ροήν. Το γεγονός ότι μερικάς φοράς η επιφάνεια του κινουμένου υγρού εμφανίζεται ως ομαλή δεν πρέπει να οδηγή εις το συμπέρασμα ότι η ροή είναι στρωτή και ότι δεν υπάρχει τυρβώδης ζώνη κάτωθι της ελευθέρας επιφανείας του υγρού. Είναι σύνηθες φαινόμενον αι δυνάμεις αδρανείας να είναι κατά πολύ μεγαλύτεραι των ιξωδών δυνάμεων.

Εις άλλος σημαντικός χαρακτηρισμός της ροής των ανοικτών αγωγών δίνεται και εκ του μεγέθους του αριθμού ***Froude*** της ροής,

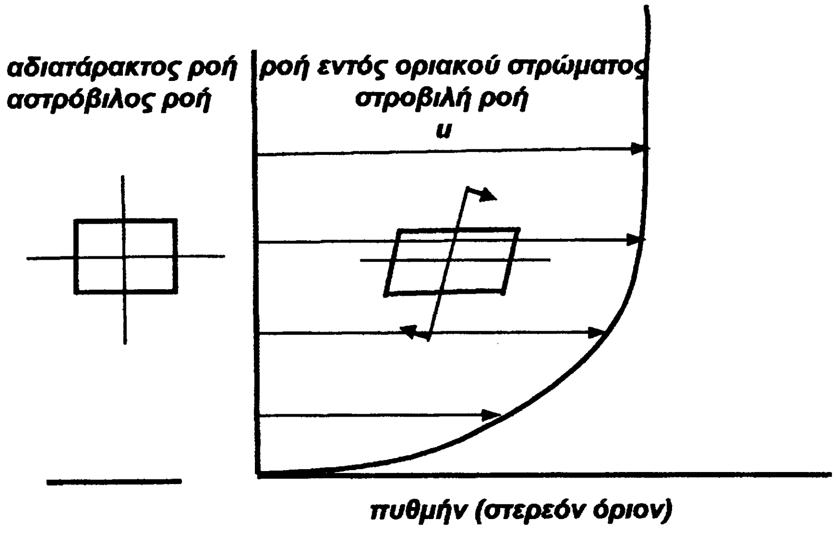
$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}} \qquad \textbf{(2.3)}$$

ένθα g *(m/s²)* η επιτάχυνσις της βαρύτητος και h *(m)* το βάθος ροής. Αν και γίνεται συστηματική μελέτη του αριθμού Froude εις τα παρακάτω Κεφάλαια, εν τούτοις πρέπει να αναφερθή ότι όταν η ταχύτης της ροής του υγρού είναι μικρά τότε είναι δυνατόν μία μικρά διαταραχή η οποία εισάγεται οπουδήποτε εις τον χώρον ροής να κατευθυνθή και προς την αντίθετον κατεύθυνσιν της ροής δηλαδή προς τα ανάντη και ούτως να επιδράση τας συνθήκας ροής εις την ανάντη περιοχήν. Τότε ο αριθμός Froude είναι μικρότερος της μονάδος και η ροή ονομάζεται ***ήρεμος*** ή ***ποταμία***. Εάν όμως η ταχύτης ροής είναι τόσον μεγάλη ώστε μία μικρά διαταραχή να μην είναι δυνατόν να μεταδοθή προς τα ανάντη, τότε συμπαρασύρεται μετά του ύδατος προς τα κατάντη. Τότε ο αριθμός Froude είναι μεγαλύτερος της μονάδος και η ροή ονομάζεται ***ταχεία*** ή ***χειμαρρώδης***. Όταν ο αριθμός Froude είναι ίσος προς την μονάδαν τότε η ροή ονομάζεται ***κρίσιμος***. Εις την περίπτωσιν ένθα ο αριθμός Froude είναι μεγαλύτερος της μονάδος η ροή χαρακτηρίζεται ως ***υπερκρίσιμος***, ενώ όταν είναι μικρότερος της μονάδος η ροή χαρακτηρίζεται ως ***υποκρίσιμος***.

Η ροή δύναται να είναι ***στροβιλή*** ή ***αστρόβιλος***. Ως στροβιλή θεωρείται η ροή εάν κάθε σωμάτιον του ρευστού έχει μίαν γωνιακήν ταχύτηταν γύρω από το ίδιον το κέντρον της μάζης του. Το Σχήμα 2.4. δεικνύει τυπικήν κατανομήν ταχύτητος με τυρβώδην ροήν όπως διαμορφώνεται υπεράνω επιπέδου επιφανείας. Η ροή είναι στροβιλή.

Προς ανακεφαλαίωσιν των ανωτέρω η ροή δύναται να είναι,

α) είτε ομοιόμορφος είτε ανομοιόμορφος ή μεταβαλλομένη,
β) είτε σταθερά είτε μή-σταθερά ή μή-μόνιμος ή ασταθής,
γ) είτε στρωτή είτε τυρβώδης,
δ) είτε ήρεμος ή ποταμία είτε ταχεία ή χειμαρρώδης και
στ) είτε στροβιλή είτε αστρόβιλος.



Σχήμα 2.4 Στροβιλή ροή

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 3

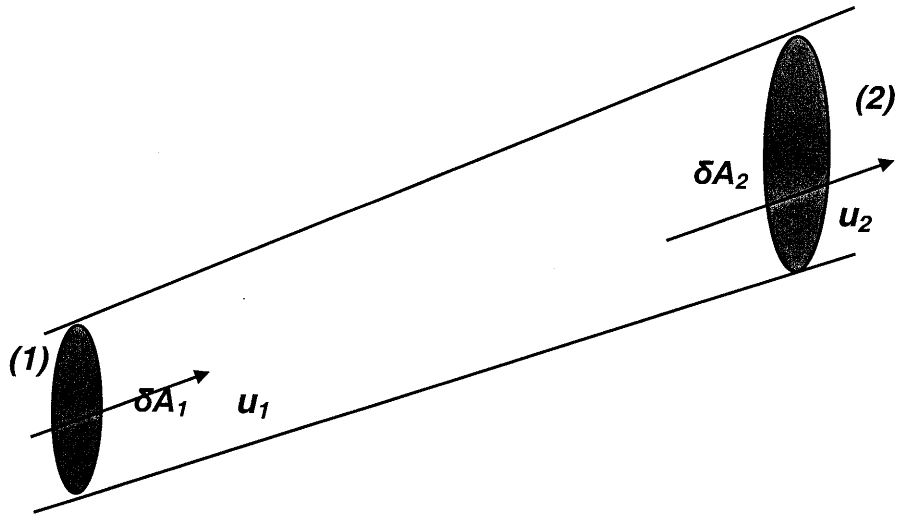
ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΤΗΣ ΜΑΖΗΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΤΟΥ BERNOULLI ΕΙΣ ΑΝΟΙΚΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ

3.1 Εξίσωσις συνεχείας της μάζης

Εις το Σχήμα 3.1. δεικνύεται εις στοιχειώδης «ροϊκός σωλήνας» ο οποίος σχηματίζεται εξ ενός συνόλου εσωκλείστων ροϊκών γραμμών. Επειδή εξ ορισμού δεν υπάρχει ροή καθέτως προς τας ροϊκάς γραμμάς, το ρευστόν πρέπει να εισέλθη και να εξέλθη εντός του αγωγού από τα άκρα μέρη του και μόνον. Ας σημειωθή ότι τα εμβαδά των διατομών εισόδου είναι $\delta A_1\left(m^2\right)$ και εξόδου $\delta A_2\left(m^2\right)$, ενώ αι αντίστοιχαι ταχύτηται είναι u_1 και u_2. Είναι προφανές ότι η στοιχειώδης ***παροχή*** $\delta Q\left(m^3/s\right)$ δίδεται εκ της εξισώσεως,

$$\delta Q = u_1\delta A_1 = u_2\delta A_2\,, \tag{3.1}$$

Μετά την ολοκλήρωσιν εις όλον τον χώρο ροής η παροχή Q θα είναι,



Σχήμα 3.1 Στοιχειώδης ροϊκός σωλήν

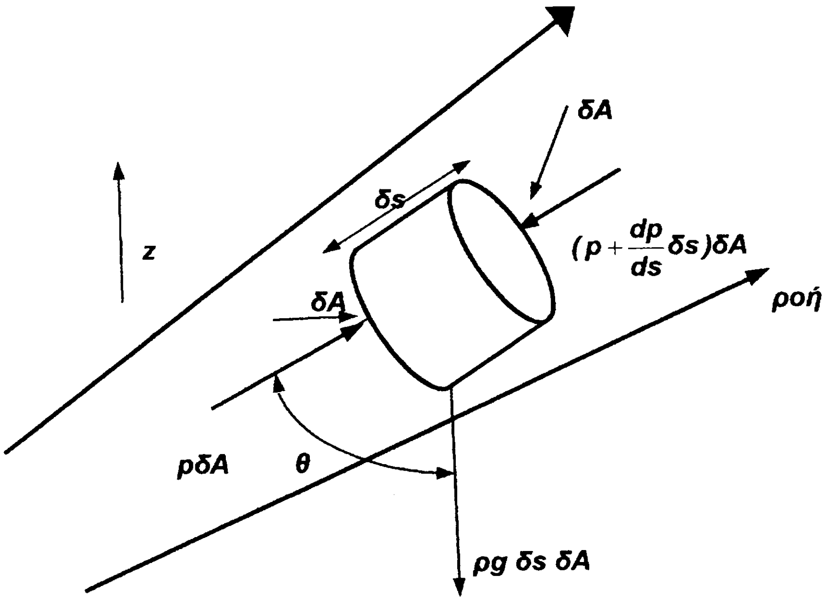
$$Q = U_1 A_1 = U_1 A_2 \tag{3.2}$$

όπου U_1 και U_2 είναι αι μέσαι τιμαί των ταχυτήτων ενώ A_1 και A_2 είναι τα εμβαδά των διατομών εις την είσοδον 1 και έξοδον 2, αντιστοίχως. Η τελική εξίσωσις της συνεχείας της μάζης δύναται να εκφρασθή ως,

$$Q = UA = \textit{σταθερά} \tag{3.3}$$

3.2 Εξίσωσις του BERNOULLI

Εις το Σχήμα 3.2 δεικνύεται εν κυλινδρικόν στοιχείον του ροϊκού σωλήνα κατά μήκος μιάς ροϊκής γραμμής. Το μήκος και το εμβαδόν της διατομής είναι $\delta s\,(m)$ και δA, αντιστοίχως. Το βάρος του στοιχείου θα είναι $\rho g \delta s \delta A$. Η δύναμις η οποία επενεργεί εις το οπίσθιον τμήμα είναι $p\delta A\,(N)$ ενώ εις το εμπρόσθιον τμήμα είναι $\left[p+\left(\dfrac{dp}{ds}\right)\delta s\right]\delta A\;(N)$ένθα $p\;(N/m^2)$ η ***στατική πίεσις***.



Σχήμα 3.2 Εξισορρόπησις δυνάμεως επί ενός ροϊκού κυλινδρικού στοιχείου

Αι κάθεται δυνάμεις αι οποίαι δρούν επί των πλευρικών τοιχωμάτων του στοιχειώδους κυλίνδρου ευρίσκονται εις ισορροπίαν. Το ρευστόν θεωρείται ότι είναι ***ιδεατόν*** ή ***μή-συνεκτικόν*** και κατά συνέπειαν αι ασκούμεναι διατμητικαί δυνάμεις ισούνται προς μηδέν. Η ταχύτης μεταβάλλεται κατά μήκος της ροϊκής γραμμής και ως εκ τούτου υπάρχει μία δύναμις επιταχύνσεως η οποία πρέπει να ληφθή υπ΄ όψιν εις την εξισορρόπησιν των δυνάμεων των δρώντων κατά μήκος του άξονος της ροής. Θεωρώντας το ίδιον βάρος του στοιχειώδους όγκου θα είναι,

$$-\rho g\delta s\delta A\,\sigma\upsilon\nu\theta + p\delta A - \left(p + \frac{dp}{ds}\delta s\right)\delta A = \frac{\rho g\delta s\delta A}{g}\frac{du}{dt} \qquad \textbf{(3.4)}$$

ή

$$-\rho g\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{dp}{ds} = \rho\frac{du}{dt} \qquad \textbf{(3.5)}$$

Επίσης ισχύει ότι,

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{dz}{ds} \qquad \textbf{(3.6)}$$

όπου z είναι ο κατακόρυφος άξων, ιδέ Σχήμα 3.2. Επειδή η ροή είναι σταθερά, το οποίον σημαίνει ότι όλαι αι μεταβολαί των φυσικών ποσοτήτων εν αναφορά προς τον χρόνον $t(s)$ είναι μηδέν, θα είναι,

$$u = \frac{ds}{dt} \qquad \textbf{(3.7)}$$

και άρα,

$$\frac{du}{dt} = u\frac{du}{ds} \tag{3.8}$$

επομένως η εξίσωσις (3.5) γράφεται,

$$\rho g\frac{dz}{ds} + \frac{dp}{ds} + \rho u\frac{du}{ds} = 0 \tag{3.9}$$

ή

$$\frac{d}{ds}\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{udu}{g}\right) = 0 \tag{3.10}$$

Δι΄ ολοκληρώσεως κατά μήκος της ροϊκής γραμμής θα είναι,

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}\nu = H \tag{3.11}$$

Η ανωτέρω εξίσωσις ονομάζεται ***εξίσωσις του Bernoulli*** και εκφράζει την ενεργειακήν εξισορρόπησιν κατά την ροή του ρευστού. Εάν έκαστος όρος της εξισώσεως (3.11) πολλαπλασιασθή με το σταθερόν ποσόν ρgQ, θα είναι,

$$(\rho gQ)z + (\rho gQ)\frac{p}{\rho g} + (\rho gQ)\frac{u^2}{2g} = \text{σταθερόν} \tag{3.12}$$

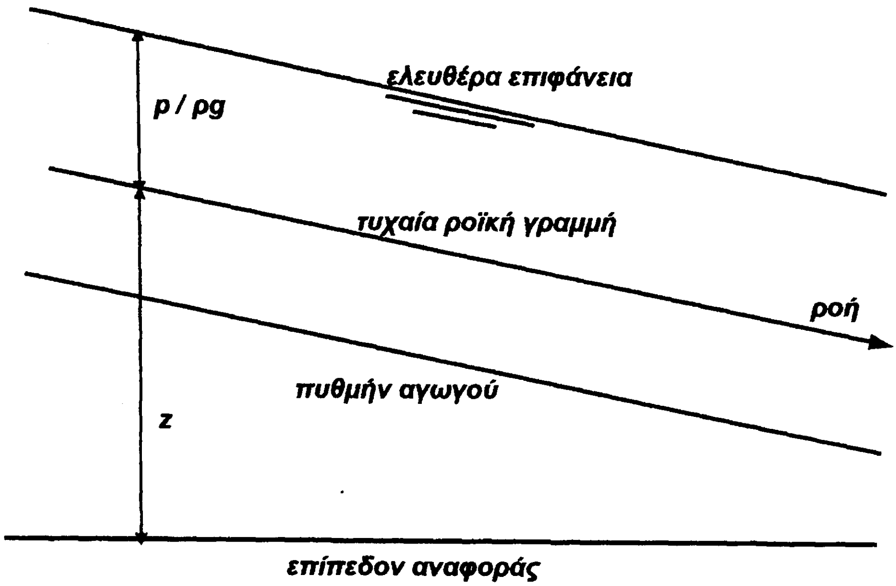
Έκαστος όρος της ανωτέρω εξισώσεως έχει μονάδας ισχύος (W). Εις την εξίσωσιν (3.11) έκαστος όρος έχει μονάδας *(m)* και ως εκ τούτου είναι φρόνιμον κάθε όρος να αναφέρεται με την έκφρασιν ύψος. Ο πρώτος όρος της εξισώσεως (3.11) είναι το ***ύψος*** λόγω θέσεως του ρευστού, ο δευτέρος όρος είναι το ***ύψος πιέσεως*** του ρευστού και ο τρίτος όρος το ***κινητικόν ύψος*** του ρευστού. Το άθροισμα όλων των ανωτέρω όρων δίδει ***το ολικόν ενεργειακόν ύψος*** ή φορτίον $H(m)$.

3.3 Η ενεργειακή εξίσωσις εις τους ανοικτούς αγωγούς

Εις την απόδειξιν της εξισώσεως Bernoulli, της ενεργειακής δηλαδή εξισώσεως, δεν γίνεται καμμιά παραδοχή σχετικώς προς τα όρια του χώρου εντός του οποίου ρέει το υγρόν. Ως αποτέλεσμα, η εξίσωσις του Bernoulli δύναται να εφαρμοσθή και εις τους ανοικτούς αγωγούς, ιδέ Σχήμα 3.3. Πρέπει όμως να σημειωθή ότι η εξίσωσις του Bernoulli εφαρμόζεται μόνο εις σταθεράν ροήν. Τότε και επειδή υπάρχει ενδιαφέρον δια ρευστά με σταθεράν την πυκνότηταν,

$$\frac{p}{\rho g}+\frac{u^2}{2g}+z= \text{σταθερά κατά μήκος μιάς ροϊκής γραμμής,}$$

Ο όρος $p/\rho g\ (m)$ είναι η στατική πίεσις του υγρού, $u^2/2g\ (m)$ είναι το κινητικόν ύψος και $z\ (m)$ το ύψος της υπό μελέτην θέσεως το οποίον μετρείται εκ του οριζοντίου επιπέδου. Αν αι ροϊκαί γραμμαί είναι ευθείς και παράλληλαι, τότε η κατανομή της πιέσεως εις κάθε μίαν διατομήν της ροής είναι ***υδροστατική***. Ακόμη και εις την περίπτωσιν της βαθμιαίως μεταβαλλόμενη ροής η καμπυλότης των ροϊκών γραμμών είναι αμυδρά. Δηλαδή η πίεσις κάθε σημείου εντός του χώρου ροής εξαρτάται μόνον εκ του κατά πόσον ευρίσκεται το σημείον αυτό κάτωθι της ελευθέρας επιφανείας του ύδατος.

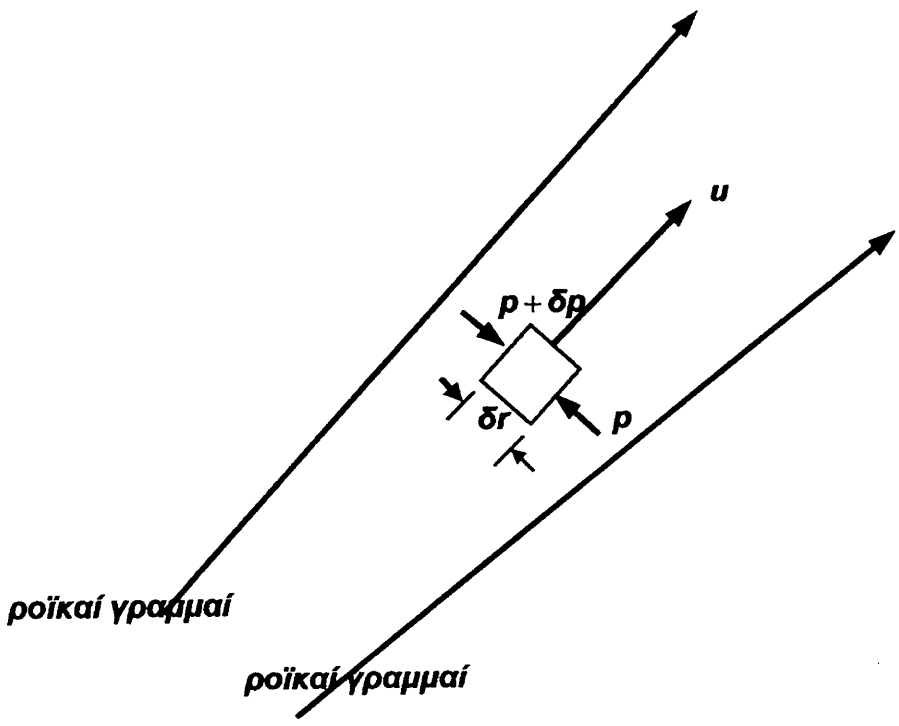


Σχήμα 3.3 Υδροστατική πίεσις και ύψος εκ του οριζοντίου επιπέδου

3.4 Υδροστατική και μή-υδροστατική κατανομή πιέσεως

Ας θεωρηθούν αι ακτινικαί δυνάμεις αι οποίαι δρουν επί ενός στοιχειώδους όγκου ελέγχου ο οποίος κινείται κατά μήκος μιάς καμπύλης ***ροϊκής γραμμής***, όπως τούτο δεικνύεται εις το Σχήμα 3.4. Εις δοθείσαν χρονική στιγμή t η ταχύτης είναι u και η ακτίς καμπυλότητος $r\,(m)$. Η σχετική επιτάχυνσις $a(m/s^2)$, ήτις δημιουργείται λόγω της καμπύλης τροχιάς, θα είναι,

$$a = \frac{u^2}{r} \qquad \textbf{(3.13)}$$



Σχήμα 3.4 Ροή επί καμπύλης ροϊκής γραμμής

Η κεντρόφυγος δύναμις *F(N)* θα είναι,

$$F = ma = \frac{\rho g}{g}\delta r\,\delta A\frac{u^2}{r} \qquad \textbf{(3.14)}$$

όπου δr είναι το ύψος του όγκου ελέγχου και δA η διατομή. Η εξισορρόπησις της δυνάμεως F γίνεται με τας διαφοράς των εξασκουμένων δυνάμεων, $p\delta A$ και $(p+\delta p)A$ τας οποίας ασκούν αι πιέσεις μεταξύ της εσωτερικής και εξωτερικής πλευράς, αντιστοίχως,

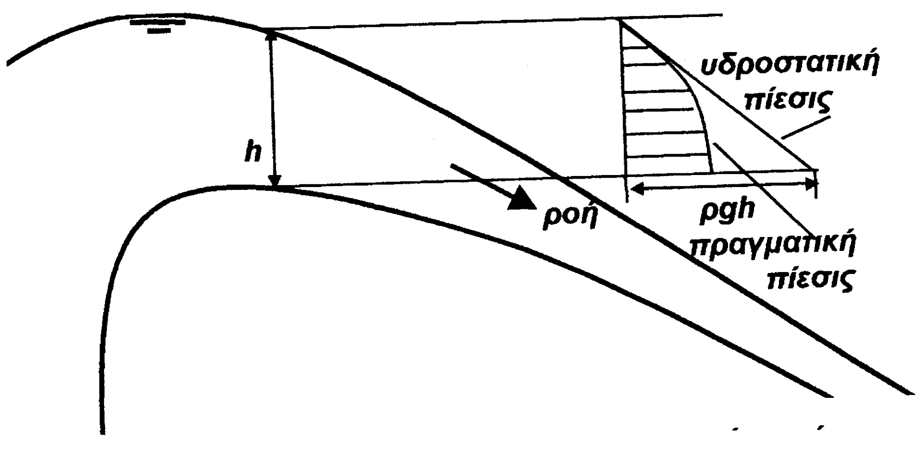
$$(p+\delta p)\delta A = p\delta A + \frac{\rho g}{g}\delta r\,\delta A\frac{u^2}{r} \tag{3.15}$$

$$\delta p\delta A = \frac{\rho g}{g}\delta r\,\delta A\frac{u^2}{r} \tag{3.16}$$

ή

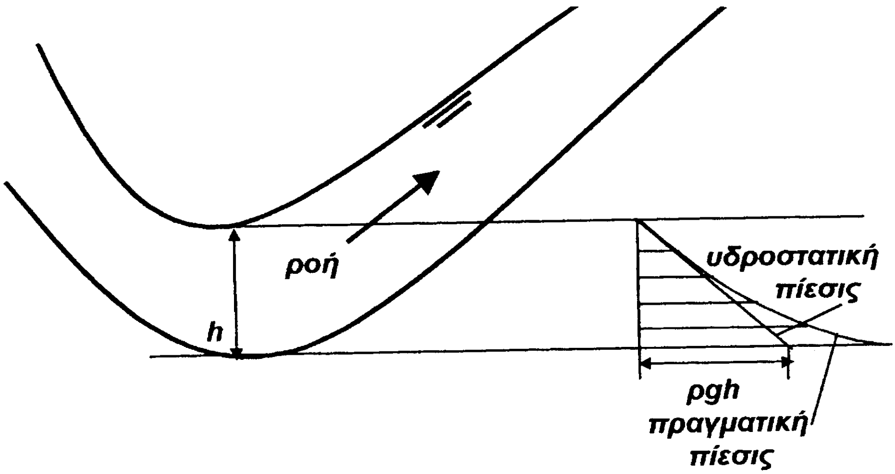
$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho g}{g}\frac{u^2}{r} \tag{3.17}$$

Εάν η ακτίς καμπυλότητος είναι πολύ μεγάλη, δηλαδή εάν $r \to \infty$ τότε $\frac{dp}{dr} = 0$ και επομένως η πίεσις p είναι σταθερά καθέτως προς τας ροϊκάς γραμμάς. Εάν θεωρηθή το Σχήμα 3.3, τότε η πίεσις κατά το βάθος ροής είναι ***υδροστατική*** οπότε η ποσότης $p/\rho g$ είναι το βάθος του ύδατος εις την υπό θεώρησιν ροϊκήν γραμμήν. Εις την γενικήν όμως περίπτωσιν η ταχύτης u και η ακτίς r είναι άγνωσται. Εις το Σχήμα 3.5. δεικνύεται η ροή πέριξ κυρτής επιφανείας με την αντίστοιχον κατανομήν πιέσεως ήτις είναι ***μή-υδροστατική***.



Σχήμα 3.5 Κατανομή πιέσεως της ροής επί κυρτής επιφανείας

Τοιαύται περιπτώσεις εμφανίζονται επί της στέψεως των εκχειλιστών φραγμάτων υδροηλεκτρικών έργων. Εις ακραίας περιπτώσεις ταχύτητος και κυρτότητος η καμπύλη οδηγεί εις αρνητικάς πιέσεις, πιέσεις δηλαδή με τιμάς ευρισκομένας κάτωθι της ατμοσφαιρικής πιέσεως. Εις το Σχήμα 3.6 δεικνύεται η ροή πέριξ κοίλης επιφανείας και η αντίστοιχος κατανομή πιέσεως.



Σχήμα 3.6 Κατανομή πιέσεως της ροής επί κοίλης επιφανείας

Να σημειωθή η καμπυλότης των κατανομών της πιέσεως διά τας περιπτώσεις των Σχημάτων 3.5. και 3.6.

Εις την περίπτωσιν καθ΄ ήν η κλίσις του ανοικτού αγωγού είναι σχετικώς μεγάλη, π.χ. μεγαλυτέρα του 1 προς 10, τότε είναι δυνατόν να υπάρξη τροποποίησις της τιμής της υδροστατικής πιέσεως ακόμη και αν αι ροϊκαί γραμμαί είναι ευθείς και παράλληλαι ματαξύ των. Όταν λοιπόν η μεταβολή της πιέσεως είναι υδροστατική, έν σημείον εις το οποίον η πίεσις είναι p ευρίσκεται εις βάθος $p/\rho g$ κάτωθι της ελευθέρας επιφανείας και ούτως το άθροισμα $p/\rho g+z$, ιδέ Σχήμα 3.3, αναπαριστά το ύψος της ελευθέρας επιφανείας του ύδατος υπεράνω του επιπέδου αναφοράς. Τότε η εξίσωσις του Bernoulli απλοποιείται ως εξής,

$$\text{ύψος ελευθέρας επιφανείας} + \frac{u^2}{2g} = \text{σταθερά} \qquad \textbf{(3.18)}$$

Διαπιστούται ότι το επιμέρος ύψος μιάς ροϊκής γραμμής υπεράνω του επιπέδου αναφοράς δεν συμμετέχει εις την ανωτέρω εξίσωσιν. Αν τώρα θεωρηθή ότι εις μίαν διατομήν η ταχύτης είναι η ιδία επί όλων των ροϊκών γραμμών τότε η εξίσωσις (3.18) ισχύει δι΄ όλην την ροήν.

3.5 Διόρθωσις της ενεργειακής εξισώσεως και της εξισώσεως ορμής

Εις την πράξιν όμως είναι σχεδόν αδύνατον να ληφθή ομοιόμορφος κατανομή ταχύτητος εις μίαν διατομήν. Η πραγματική κατανομή της ταχύτητος εις τους ανοικτούς αγωγούς δέχεται επιδράσεις και εκ των στερεών ορίων αλλά και εκ της ελευθέρας επιφανείας του ύδατος. Αι καμπυλώσεις της ροής καθώς και η τραχύτης των στερεών επιφανειών επιδρούν επί της ταχύτητος της ροής. Αι ανωμαλίαι των στερεών ορίων των ανοικτών αγωγών είναι τόσον μεγάλαι και υπάρχουν εις τοιαύτην τυχαίαν κατανομήν ώστε κάθε ανοικτός αγωγός έχει την ιδικήν του κατανομήν ταχύτητος. Εις γενικάς γραμμάς δύναται να λεχθή ότι η μεγίστη τιμή της ταχύτητος εμφανίζεται εις σημεία τα οποία ευρίσκονται ολίγον κάτωθι της ελευθέρας επιφανείας του υγρού, συνήθως από 0.05 μέχρις 0.25 φοράς το πλήρες βάθος ροής, ενώ η μέση ταχύτητας η οποία έχει τα 85.0% της ταχύτητος της ελευθέρας επιφανείας εμφανίζεται επί θέσεως κειμένης εις απόστασιν 0.6 φοράς το πλήρες βάθος ροής κάτωθι της ελευθέρας επιφανείας. Μια τυπική κατανομή ταχυτήτων εντός ενός ανοικτού αγωγού τραπεζοειδούς διατομής δεικνύεται εις το Σχήμα 3.7. Ούτως η έκφρασις $u^2/2g$ ήτις παριστά την κινητικήν ενέργειαν του ρευστού ανά μονάδαν βάρους αυτού, δηλαδή το κινητικόν ύψος, έχει υποεκτιμηθεί, εάν βεβαίως ο υπολογισμός έχει γίνη με την μέσην τιμήν $\overline{u}$ της ταχύτητος εις την διατομήν. Διά να διορθωθή λοιπόν η τιμή πολλαπλασιάζεται το κινητικόν ύψος $\overline{u}^2/2g$ με τον αριθμόν α έναν δηλαδή ***συντελεστήν διορθώσεως της κινητικής ενεργείας*** και ο οποίος λαμβάνει τιμάς από 1.03 μέχρις και 1.6 διά φυσικούς ανοικτούς αγωγούς. Το α λαμβάνει μεγαλυτέρας τιμάς εις μικροτέρας διατομής ανοικτούς αγωγούς. Συνήθως η τιμή του α δι΄ανοικτόν αγωγόν συνθέτου διατομής A αποτελουμένης εκ διατομών A_1, A_2, A_3,...A_n με μέσας ταχύτητας $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \ldots \overline{u}_n$ ανά διατομήν και $\overline{u}(=Q/A)$ την μέσην ταχύτηταν όλης της συνθέτου διατομής είναι,

$$\alpha = \frac{\overline{u}_1^3 A_1 + \overline{u}_2^3 A_2 + \overline{u}_3^3 A_3 + \ldots + \overline{u}_n^3 A_n}{u^3 (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n)} \qquad \textbf{(3.19)}$$

Τέλος, να αναφερθή επίσης ότι η ***ορμή*** της ροής του υγρού πρέπει να διαφοροποιηθή αναλόγως με έν συντελεστήν ***διορθώσεως της ορμής*** β. Ούτως, η ορθή έκφρασις δια τον υπολογισμόν της ορμής, ιδέ και Κεφάλαιον 10, θα είναι,

$$ορμή = \beta \rho Q\overline{u} \qquad \textbf{(3.20)}$$

ενώ ο συντελεστής β μεταβάλλεται από 1.01 μέχρι και 1.2.