ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΜΟΝΤΕΛΑ ΒΛΑΒΩΝ
&
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ

Η *αξιοπιστία (reliability)* είναι ένα μέτρο εκτίμησης του βαθμού επιτυχίας ενός εξαρτήματος ή συστήματος και ορίζεται σαν την πιθανότητά του να παρουσιάζει *ικανοποιητική* συμπεριφορά για προκαθορισμένο *χρονικό διάστημα* και συγκεκριμένες *συνθήκες* λειτουργίας. Η συμπεριφορά ενός εξαρτήματος ή συστήματος είναι ικανοποιητική όταν τα λειτουργικά του χαρακτηριστικά βρίσκονται εντός ορισμένων προκαθορισμένων ορίων. Τα όρια αυτά εξαρτώνται από τις απαιτήσεις (προδιαγραφές) που τίθενται σε κάθε συγκεκριμένη εφαρμογή. Έτσι, ενώ η συμπεριφορά του μπορεί να είναι ικανοποιητική σε μία εφαρμογή, για μία άλλη, με αυστηρότερες απαιτήσεις, μπορεί να μην είναι αποδεκτή. Στην περίπτωση των απλών εξαρτημάτων, όπως είναι τα συνηθισμένα ηλεκτρονικά εξαρτήματα, η αξιοπιστία τους προσδιορίζεται πειραματικά με την εφαρμογή κατάλληλων δοκιμών προσδιορισμού του χρόνου ζωής τους ή από τη μακρόχρονη συγκέντρωση στοιχείων, που αναφέρονται στις βλάβες τους. Προκειμένου για συστήματα που περιλαμβάνουν ένα πλήθος εξαρτημάτων, ο υπολογισμός της αξιοπιστίας τους γίνεται με βάση τις αξιοπιστίες των εξαρτημάτων τους. Γενικά, η επίτευξη υψηλής αξιοπιστίας βασίζεται στην καλή σχεδίαση, την κατάλληλη επιλογή εξαρτημάτων, και την έκταση του πλεονασμού που θεωρείται σκόπιμο ή συμφέρον να εισαχθεί.

1-1 ΤΥΠΟΙ ΒΛΑΒΩΝ

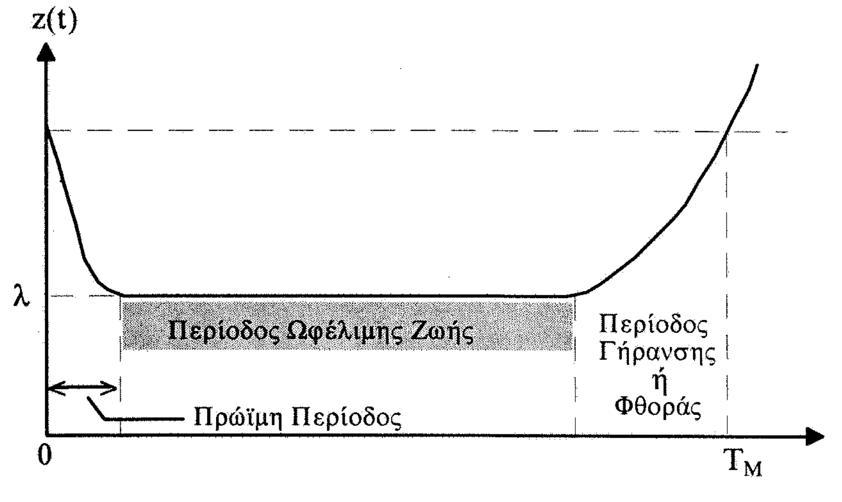
Τα διάφορα εξαρτήματα έχουν προκαθορισμένα λειτουργικά χαρακτηριστικά που, ανάλογα με τις διαδικασίες κατασκευής τους, μπορεί να κυμαίνονται μεταξύ ορισμένων ορίων. Η πλήρης ή η μερική εκτροπή ορισμένων ή όλων των χαρακτηριστικών τους, από τα προκαθορισμένα όρια, ορίζεται σαν βλάβη του εξαρτήματος. Βλάβες που εμφανίζονται ξαφνικά και προκαλούν την απώλεια της επιθυμητής συμπεριφοράς ενός εξαρτήματος ονομάζονται *καταστροφικές (catastrophic)* ή *τυχαίες βλάβες (random failures).* Τέτοιες βλάβες δεν μπορούν να προβλεφτούν και είναι πολύ συνηθισμένες στα εξαρτήματα. Ο φυσικός μηχανισμός των τυχαίων βλαβών μπορεί να θεωρηθεί σαν μία απροσδόκητη συσσώρευση καταπονήσεων που υπερβαίνουν την αντοχή του εξαρτήματος και η οποία λαμβάνει χώρα ξαφνικά. Στα συστήματα, όπου περιλαμβάνονται πολλά εξαρτήματα, μία και μόνο καταστροφική βλάβη ενός εξαρτήματος μπορεί να είναι και καταστροφική για το σύστημα. Αν αυτό δε συμβαίνει, τότε η καταστροφική βλάβη ενός εξαρτήματος λέγεται *μερική βλάβη, (partial failure)* του συστήματος. Δηλαδή, το σύστημα μπορεί να λειτουργεί ικανοποιητικά (εντός των αποδεκτών ορίων λειτουργίας), μολονότι ένα ή περισσότερα από τα εξαρτήματά του έχουν υποστεί καταστροφική βλάβη. Συνήθως οι μερικές βλάβες υποβαθμίζουν τη λειτουργική συμπεριφορά ενός συστήματος και προκαλούν την πρόωρη φθορά του. Ένα άλλο είδος βλαβών είναι οι αποκαλούμενες *βλάβες ολίσθησης (drift failures).* Αυτές οι βλάβες προκαλούν τη βαθμιαία παρέκκλιση των λειτουργικών χαρακτηριστικών ενός εξαρτήματος ή συστήματος. Οι βλάβες ολίσθησης, ανάλογα με τα αίτια που τις προκαλούν και το μέγεθός τους, μπορεί να είναι *προσωρινές* ή *μόνιμες.* Συχνά, οι βλάβες ολίσθησης που δε διορθώνονται οδηγούν σε καταστροφικές βλάβες. Ένα άλλο είδος βλαβών που συναντάται σε μερικά ηλεκτρονικά συστήματα, είναι οι αποκαλούμενες *διαλείπουσες βλάβες (intermittent failures)* ή *κρυφές βλάβες (hidden failures).* Τέτοιες βλάβες δεν είναι εύκολο να επιδιορθωθούν διότι συμβαίνουν ξαφνικά και διαρκούν για μικρό χρονικό διάστημα. Ειδικότερα, στα υπολογιστικά συστήματα οι βλάβες, που μπορεί να οφείλονται σε φυσική βλάβη ορισμένων εξαρτημάτων ή στην επίδραση του περιβάλλοντος, έχουν σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας *κατάστασης βλάβης (fault)* του συστήματος που οδηγεί σε *σφάλματα (errors).* Τα σφάλματα αυτά εκδηλώνονται με λανθασμένα αποτελέσματα ή ακόμη και με απόκλιση από τη σωστή ροή ενός προγράμματος. Έτσι, ένα σφάλμα είναι το αποτέλεσμα μιας κατάστασης βλάβης και μπορεί να είναι *μόνιμο (hard failure)* ή *μεταβατικό (παροδικό, απαλό, soft ή transient failure).* Οι *μεταβατικές καταστάσεις* βλάβης (*transient faults*) είναι εκείνες που οφείλονται σε παροδικές εξωτερικές επιδράσεις, ενώ οι *διαλείπουσες καταστάσεις βλάβης* εμφανίζονται απροσδόκητα και σποραδικά.

1-2 ΤΡΟΠΟΙ ΒΛΑΒΩΝ

Τα εξαρτήματα και τα συστήματα μπορούν να υποστούν βλάβη κατά ποικίλους τρόπους *(failure-modes)*, που εξαρτώνται από τα ιδιαίτερα κατασκευαστικά και λειτουργικά χαρακτηριστικά τους. Για παράδειγμα, δύο πολύ συνηθισμένοι τρόποι βλαβών ορισμένων απλών ηλεκτρονικών εξαρτημάτων (π.χ. αντίσταση) είναι οι βλάβες ανοικτού και κλειστού κυκλώματος, που ονομάζονται και *ακραίες βλάβες (extreme failures).* Άλλα, πλέον πολύπλοκα, εξαρτήματα έχουν μεγαλύτερο αριθμό παρόμοιων ακραίων βλαβών. Βλάβες που δεν είναι ακραίες, συχνά ονομάζονται *ενδιάμεσες βλάβες (intermediate failures).* Στα ψηφιακά εξαρτήματα, τα συνηθισμένα μοντέλα για τις *καταστάσεις βλαβών* των διαφόρων εισόδων και εξόδων των λογικών κυκλωμάτων είναι το *μόνιμο-0 (s-a-0, stuck - at - 0)* και το *μόνιμο-1 (s-a-1, stuck-at -1).* Γενικά, οι διάφοροι συνδυασμοί των τρόπων βλαβών των εξαρτημάτων μπορεί να προκαλέσουν την καταστροφική ή τη μερική βλάβη ενός συστήματος. Στην τελευταία περίπτωση το σύστημα εξακολουθεί να λειτουργεί ικανοποιητικά με πλήρεις ή *υποβαθμισμένες* λειτουργίες. Για ορισμένα συστήματα οι διάφορες βλάβες ταξινομούνται σε *ακίνδυνες (fail-to-safe failures)* και σε *επικίνδυνες (fail-to-danger failures).* Μία άλλη ταξινόμηση βασίζεται στη διάκριση σε *εμφανείς* και *μη εμφανείς* βλάβες. Οι εμφανείς βλάβες αναγγέλλονται από μόνες τους, ενώ οι μη εμφανείς δεν αποκαλύπτονται παρά μόνο μετά το λεπτομερή έλεγχο του συστήματος.

1-3 ΡΥΘΜΟΣ ΒΛΑΒΩΝ

Μία βασική παράμετρος στη μελέτη της αξιοπιστίας είναι η συνάρτηση του ρυθμού βλαβών *(hazard function ή hazard rate)*, $z(t)$, που δίνει το ρυθμό με τον οποίο συμβαίνουν οι βλάβες σε ένα εξάρτημα ή σύστημα. Ο ρυθμός βλαβών συνήθως εκφράζεται σε βλάβες ανά ώρα. Μία άλλη μονάδα, που πολλές φορές χρησιμοποιείται, είναι το fit που εκφράζει τον αριθμό βλαβών ανά 10^9 ώρες. Για ένα αρκετά μεγάλο και ομοιογενή πληθυσμό εξαρτημάτων ή συστημάτων, η συνάρτηση του ρυθμού βλαβών έχει τη μορφή που σχεδιάζεται στο Σχ.1-1, που ονομάζεται και *καμπύλη χρόνου ζωής (bathtub curve).* Στην καμπύλη αυτή, διακρίνονται τρεις χαρακτηριστικές περίοδοι ζωής που είναι η *πρώιμη περίοδος (early failure period),* η *ωφέλιμη περίοδος (useful life period)* και η *περίοδος γήρανσης* ή *φθοράς (wearout failure period).* Στην πρώιμη περίοδο ζωής, ο πληθυσμός των εξαρτημάτων ή των συστημάτων παρουσιάζει ένα φθίνοντα, υψηλό ρυθμό βλαβών, που οφείλεται σε ελαττωματικά εξαρτήματα και κατασκευαστικές ατέλειες. Έτσι, η λειτουργία για κάποιο χρονικό διάστημα, που ονομάζεται περίοδος *δοκιμαστικής λειτουργίας (burn-in ή debugging ή infant mortality period),* οδηγεί στην απομάκρυνση των περισσότερων από τα ελαττωματικά εξαρτήματα του πληθυσμού. Τα εξαρτήματα που απομένουν παρουσιάζουν στη συνέχεια έναν κατά προσέγγιση *σταθερό ρυθμό βλαβών,* λ. Αυτό συμβαίνει στην περίοδο ωφέλιμης ζωής. Στο τέλος αυτής της περιόδου, ο ρυθμός βλαβών αυξάνει αρκετά απότομα διότι αρχίζει η φθορά, λόγω γήρανσης, των εξαρτημάτων.

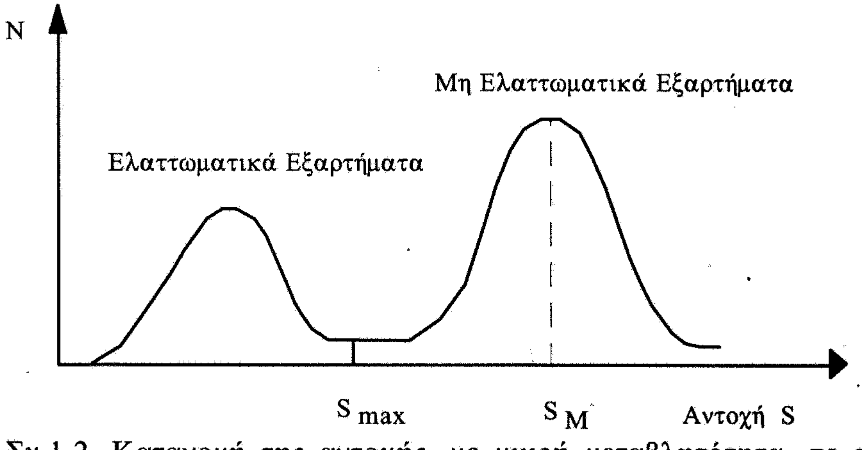


Σχ.1-1. Καμπύλη χρόνου ζωής εξαρτημάτων.

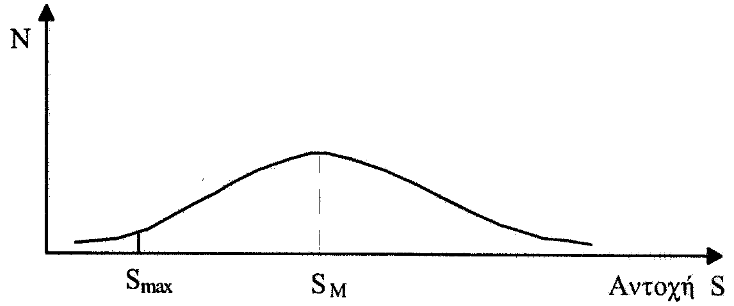
Ο χρόνος T_M που σημειώνεται στην καμπύλη χρόνου ζωής του Σχ. 1-1 ονομάζεται *μέσος χρόνος φθοράς* ή *μέση ζωή* του πληθυσμού. Κατά τη διάρκεια αυτής της χρονικής περιόδου, περίπου το μισό του πληθυσμού υπόκειται σε βλάβες. Κατά τη διάρκεια της πρώιμης και ωφέλιμης περιόδου, συμβαίνουν κυρίως καταστροφικές βλάβες, ενώ κατά τη διάρκεια της περιόδου φθοράς συμβαίνουν κυρίως βλάβες ολίσθησης. Από την καμπύλη ζωής προκύπτει το συμπέρασμα ότι δύο συστηματικές διαδικασίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να αυξηθεί η αξιοπιστία. Η πρώτη διαδικασία περιλαμβάνει το *δοκιμαστικό έλεγχο* και εφαρμόζεται κατά τη διάρκεια της πρώιμης περιόδου ζωής. Η δεύτερη είναι η ***προληπτική συντήρηση*** *(preventive maintenance),* που οδηγεί στην εξάλειψη βλαβών λόγω φθοράς, συνεπώς, στην αύξηση του χρόνου ζωής των εξαρτημάτων.

Πρώιμες Βλάβες

Οπως αναφέρθηκε, η συστηματική διαδικασία για την εξάλειψη των πρώιμων βλαβών περιλαμβάνει το δοκιμαστικό έλεγχο, που συνίσταται στη λειτουργία των εξαρτημάτων ή συστημάτων για μία χρονική περίοδο κατά τη διάρκεια της οποίας αποκαλύπτονται οι πρώιμες βλάβες. Αυτή η περίοδος κυμαίνεται συνήθως από 20 ως 200 ώρες και καθορίζεται εμπειρικά από τους κατασκευαστές. Ο μηχανισμός των πρώιμων βλαβών είναι ανάλογος με εκείνον που προκαλεί τις τυχαίες βλάβες, δηλαδή, οφείλεται και αυτός σε απρόβλεπτες ξαφνικές συσσωρεύσεις καταπονήσεων που υπερβαίνουν την κατασκευαστική αντοχή του εξαρτήματος. Οι πρώιμες βλάβες συμβαίνουν σε χαμηλότερες στάθμες καταπονήσεων από τις προβλεπόμενες, πράγμα που οφείλεται στις ατέλειες και αδυναμίες μερικών ελαττωματικών εξαρτημάτων.



Σχ.1-2. Κατανομή της αντοχής, με μικρή μεταβλητότητα, σε πληθυσμό N εξαρτημάτων.



Σχ.1-3. Κατανομή της αντοχής, με μεγάλη μεταβλητότητα, σε πληθυσμό Ν εξαρτημάτων.

Το Σχ. 1-2 δείχνει τις κατανομές της αντοχής των ελαττωματικών και μη ελαττωματικών εξαρτημάτων. Με S_M συμβολίζεται η μέση αντοχή των μη ελαττωματικών εξαρτημάτων και με S_{max} η μέγιστη συσσώρευση καταπονήσεων, όταν τα εξαρτήματα βρίσκονται σε λειτουργία. Στην περίπτωση αυτή, που η μεταβλητότητα της αντοχής είναι σχετικά μικρή, ο ποιοτικός έλεγχος δεν είναι τόσον αποτελεσματικός ώστε να απομακρυνθούν τα εξαρτήματα που έχουν μικρό βαθμό αντοχής. Ομως, η διαδικασία του δοκιμαστικού ελέγχου είναι ικανοποιητική, διότι αφενός μεν τα ελαττωματικά εξαρτήματα δε διατηρούν την απαιτούμενη συσσώρευση καταπονήσεων, αφετέρου δε, τα μη ελαττωματικά εξαρτήματα μένουν ανεπηρέαστα. Το Σχ.1-3 δείχνει την κατανομή της αντοχής ενός πληθυσμού εξαρτημάτων ή συστημάτων που παρουσιάζει μεγάλη μεταβλητότητα αντοχής των εξαρτημάτων του. Στην περίπτωση αυτή, ο δοκιμαστικός έλεγχος δίνει πολύ περιορισμένα αποτελέσματα και ο πληθυσμός τείνει να διατηρήσει τον υψηλό ρυθμό των βλαβών του.

Περίοδος Ωφέλιμης Ζωής

Η περίοδος ωφέλιμης ζωής, ακολουθεί την πρώιμη περίοδο βλαβών και χαρακτηρίζεται από βλάβες που έχουν τυχαία κατανομή. Ο ρυθμός βλαβών είναι μικρότερος από εκείνον της προηγούμενης περιόδου και είναι *σταθερός*. Σε αυτήν την περίοδο, οι πρώιμες βλάβες έχουν μειωθεί δραστικά ή ακόμη έχουν εξαλειφθεί και η φθορά λόγω γήρανσης δεν έχει ακόμη εμφανιστεί. Αυτή ακριβώς η περίοδος λειτουργίας παρουσιάζει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον στη μελέτη της αξιοπιστίας. Με μία καλή προσέγγιση, οι βλάβες κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου ακολουθούν την *εκθετική κατανομή*.

Περίοδος Γήρανσης

Στο τέλος της ωφέλιμης ζωής ενός εξαρτήματος ή συστήματος ο ρυθμός βλαβών τείνει να αυξηθεί αρκετά γρήγορα, λόγω φαινομένων διάβρωσης, τριβής, κόπωσης, ολίσθησης κ.λ.π. Συνήθως, κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου οι βλάβες ακολουθούν την ***κανονική*** ή τη *λογαριθμική-κανονική* κατανομή. Ένας τρόπος αύξησης της αξιοπιστίας είναι με *προληπτική συντήρηση (preventive maintenance),* πριν αρχίσει η περίοδος φθοράς.

1-4 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ

Σε ένα πείραμα που έχει N δυνατά και εξίσου πιθανά αποτελέσματα, η πιθανότητα ενός συγκεκριμένου αποτελέσματος είναι ίση με 1/N. Αν τα παραπάνω αποτελέσματα δεν είναι εξίσου πιθανά, η πιθανότητα του αποτελέσματος X είναι:

$$\Pr\{X\} = \lim_{N \to \infty} \frac{N_X}{N} \qquad \textbf{(1-1)}$$

όπου N_x είναι ο αριθμός των πειραμάτων με αποτέλεσμα X και N ο συνολικός αριθμός των πειραμάτων. Οταν $N \to \infty$ ο λόγος N_x/N δίνει την ακριβή πιθανότητα. Μία καλή προσέγγιση αυτής της πιθανότητας λαμβάνεται για μεγάλες τιμές του N. Στην παραπάνω θεώρηση το αποτέλεσμα ενός πειράματος ονομάζεται και *γεγονός*.

Παράδειγμα 1-1

Μία λέξη των 8 bit έχει πέντε 1 και τρία 0 σε τυχαίες θέσεις. Αν ληφθούν με τυχαίο τρόπο δύο bit, πια είναι η πιθανότητα τα δύο αυτά bit να είναι 1;

Λύση

Το γεγονός επιτυχίας είναι να ληφθούν δύο από τα πέντε bit που είναι 1. Οι τρόποι με τους οποίους μπορεί αυτά να ληφθούν είναι:

$$C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{4x5}{2} = 10$$

Εξάλλου, όλοι οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να ληφθούν 2 από τα 8 bit είναι:

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{7x8}{2} = 28$$

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P = \frac{10}{28} = 0.357$$

Παράδειγμα 1-2

Ας θεωρηθεί μία τετραγωνική διευθέτηση ανεξάρτητων κυψελίδων μνήμης, 4x4. Αν υπάρχουν 7 κυψελίδες με βλάβη, να υπολογιστεί η πιθανότητα τουλάχιστον μία γραμμή να έχει 4 κυψελίδες με βλάβη.

Λύση

Οι επτά βλάβες στο σύνολο των δεκαέξι κυψελίδων μπορούν να διευθετηθούν με C_7^{16} τρόπους (σχέδια βλαβών). Οι 4 από τις επτά κυψελίδες με βλάβη μπορεί να βρίσκονται σε όλες τις κυψελίδες μιας γραμμής (τέσσερις κυψελίδες), ενώ οι υπόλοιπες τρεις μπορεί να είναι σε C_3^{12} διαφορετικές θέσεις. Επειδή υπάρχουν τέσσερις γραμμές, το σύνολο των σχεδίων βλαβών που ενδιαφέρει είναι $4x C_3^{12}$. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P = \frac{4x\binom{12}{3}}{\binom{16}{7}} = \frac{4x12!x9!x7!}{9!x3!x16!} = \frac{1}{13}$$

Πιθανότητα ένωσης

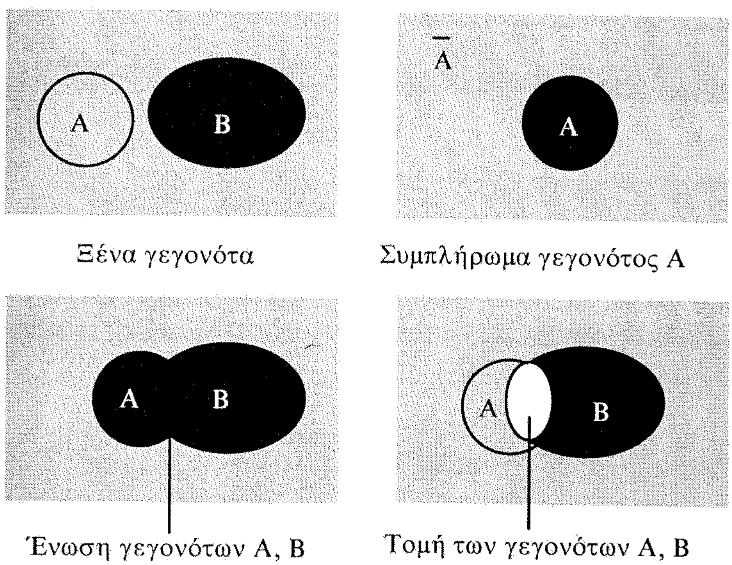
Αν A_1, A_2, ...,A_n είναι γεγονότα, που είναι μεταξύ τους *αμοιβαίως αποκλειόμενα* ή *ξένα μεταξύ τους* (δηλ. δεν μπορεί να συμβούν ταυτόχρονα), τότε ισχύει:

$$\Pr\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} = \Pr\{A_1 + A_2 + \ldots + A_n\} = \sum_{i=1}^{n} \Pr\{A_i\} \qquad (1\text{-}2)$$

Γενικά, για γεγονότα που δεν είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα ισχύει:

$$\Pr\{A_1 + A_2 + \ldots + A_n\} = \sum_{i=1}^{n} \Pr\{A_i\} - \sum_{\substack{i,j \\ i<j}} \Pr\{A_i A_j\} + \sum_{\substack{i,j,k \\ i<j<k}} \Pr\{A_i A_j A_k\} + \ldots + (-1)^{n-1} \Pr\{A_1 A_2 \ldots A_n\} \tag{1-3}$$

Για δύο γεγονότα, A, B η πιθανότητα της ένωσης A+B είναι Pr{A+B}=Pr{A}+Pr{B}-Pr{AB}. Αυτό γίνεται κατανοητό και με τα ***διαγράμματα Venn*** του Σχ.1-4 όπου, όπως φαίνεται, από το άθροισμα των πιθανοτήτων των γεγονότων πρέπει να αφαιρεθεί η τομή τους για να μη ληφθεί υπόψη δύο φορές.



Σχ.1-4. Διαγράμματα Venn διαφόρων γεγονότων A, B.

Πιθανότητα Τομής

Αν τα γεγονότα A_1, A_2,...,A_n είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα, τότε ισχύει:

$$\Pr\{A_1 \cdot A_2 \cdots A_n\} = \prod_{i=1}^{n} \Pr\{A_i\} \tag{1-4}$$

Γενικά, για n γεγονότα ισχύει:

$$\Pr\left\{\bigcap_{i=1}^{n} \Pr\{A_i\}\right\} = \Pr\{A_1 \cdot A_2 \cdots A_n\}$$

$$= \Pr(A_1) \cdot \Pr(A_2|A_1) \cdot \Pr(A_3|A_1 A_2)$$

$$\ldots \Pr(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) \qquad (1\text{-}5)$$

όπου $\Pr(A_\kappa|A_i A_j \ldots A_r)$ είναι η πιθανότητα του γεγονότος A_k δεδομένου ότι τα γεγονότα A_i, A_j, ..., A_r έχουν συμβεί. Η πιθανότητα αυτή ονομάζεται *υπό συνθήκη πιθανότητα*. Η υπό συνθήκη πιθανότητα ενός γεγονότος Α, δεδομένου ότι το γεγονός Β έχει συμβεί, είναι:

$$\Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{A \cap B\}}{\Pr\{B\}} \qquad (1\text{-}6)$$

με τον περιορισμό $\Pr\{B\} \neq 0$. Οταν τα γεγονότα Α, Β είναι μεταξύ τους *ανεξάρτητα* τότε Pr{AB}=Pr{A}Pr{B} και Pr{A|B}=Pr{A}.

Παράδειγμα 1-3

Μία λέξη με 10 bit έχει ένα σφάλμα σε μία τυχαία θέση. Αν το σφάλμα είναι τουλάχιστον στην πέμπτη θέση, πια είναι η πιθανότητά του να είναι στο τελευταίο bit;

Λύση

Έστω B_{10} το γεγονός ότι το δέκατο bit έχει το σφάλμα και Α το γεγονός ότι το σφάλμα βρίσκεται τουλάχιστον στη πέμπτη θέση. Τότε είναι:

$$\Pr\{B_{10}|A\} = \frac{\Pr\{B_{10}A\}}{\Pr\{A\}}$$

Ομως, $\Pr\{B_{10}A\}=\Pr\{B_{10}\}$, διότι αν ισχύει το γεγονός B_{10} τότε ισχύει και το Α. Επομένως, είναι:

$$\Pr\{B_{10}|A\} = \frac{\Pr\{B_{10}\}}{\Pr\{A\}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{1}{6}$$

Σχέση του Bayes

Αν Α και Β είναι δύο γεγονότα, το Α μπορεί να εκφραστεί σαν:

$$A = AB \bigcup A\overline{B} \tag{1-7}$$

όπου $\overline{B}$ είναι το γεγονός ότι δε συνέβηκε το Β. Επειδή τα γεγονότα που εκφράζονται από τα ΑΒ και $A\overline{B}$ είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα, θα είναι:

$$\begin{aligned} \Pr\{A\} &= \Pr\{AB\} + \Pr\{A\overline{B}\} \\ &= \Pr\{A|B\}\cdot\Pr\{B\} + \Pr\{A|\overline{B}\}\cdot\Pr\{\overline{B}\} \\ &= \Pr\{A|B\}\cdot\Pr\{B\} + \Pr\{A|\overline{B}\}\cdot(1-\Pr\{B\}) \end{aligned} \tag{1-8}$$

Παράδειγμα 1-4

Ας θεωρηθούν δύο λέξεις W_1, W_2 των 8 bit που περιλαμβάνουν αντίστοιχα (σε τυχαίες θέσεις) δύο μηδενικά και έξι 1 και πέντε μηδενικά και τρία 1. Αν ληφθεί μία λέξη με τυχαίο τρόπο, και από τη λέξη αυτή ληφθεί ένα τυχαίο bit που είναι μηδέν, ποια είναι η πιθανότητα το bit αυτό να ανήκει στη λέξη W_1 ;

Λύση

Ας συμβολιστούν, αντίστοιχα, με B_0 και Α τα γεγονότα ότι λήφθηκε το bit 0 και ότι επελέγη η λέξη W_1. Με $\overline{A}$ συμβολίζεται το γεγονός ότι δεν λήφθηκε η λέξη W_1 (αλλά, η λέξη W_2). Τότε είναι:

$$\begin{aligned} \Pr\{A|B_0\} &= \frac{\Pr\{AB_0\}}{\Pr\{B_0\}} \\ &= \frac{\Pr\{B_0|A\}\Pr\{A\}}{\Pr\{B_0\}} \\ &= \frac{\Pr\{B_0|A\}\Pr\{A\}}{\Pr\{B_0|A\}\Pr\{A\} + \Pr\{B_0|\overline{A}\}\Pr\{\overline{A}\}} \\ &= \frac{\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1-5

Στον έλεγχο μιας μνήμης η πιθανότητα να ανιχνευτεί ένα bit σε βλάβη, όταν η βλάβη πράγματι υπάρχει, είναι 0.95. Εξάλλου, με πιθανότητα 0.01 ο έλεγχος μπορεί να δείξει βλάβη σε ένα bit που δεν έχει βλάβη. Αν σε μία μνήμη το ποσοστό των bits που έχουν βλάβη είναι 0.2%, να βρεθεί η πιθανότητα ενός bit να έχει πράγματι βλάβη όταν το αποτέλεσμα του ελέγχου δείχνει βλάβη.

Λύση

Έστω B το γεγονός ότι το bit που ελέγχεται έχει βλάβη και T το γεγονός ότι ο έλεγχος σε ένα bit με βλάβη, δείχνει βλάβη. Ας παρασταθεί με $\overline{B}$ το γεγονός ότι το bit που ελέγχεται δεν έχει βλάβη. Τότε είναι:

$$\Pr\{B|T\} = \frac{\Pr\{BT\}}{\Pr\{T\}}$$

$$= \frac{\Pr\{T|B\}\Pr\{B\}}{\Pr\{T|B\}\Pr\{B\} + \Pr\{T|\overline{B}\}\Pr\{\overline{B}\}}$$

$$= \frac{0.95\text{x}0.002}{0.95\text{x}0.002 + 0.01\text{x}(1-0.002)} \approx 0.16$$

1-5 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ

Στα διάφορα εξαρτήματα, οι χρόνοι που μεσολαβούν μεταξύ των βλαβών τους είναι τυχαίοι, και ως τέτοιοι ακολουθούν κάποια *πιθανοτική κατανομή* (*probability distribution*). Αν X είναι μία τυχαία και συνεχής μεταβλητή, που παριστάνει τους χρόνους βλάβης ενός εξαρτήματος, η *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function, pdf)*, $f_X(t)$ ορίζεται έτσι ώστε να είναι:

$$\Pr\{a \le X \le b\} = \int_a^b f_X(t)dt \tag{1-9}$$

Η *αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (Cumulative probability distribution function ή Cdf)*, $F_X(t)$ είναι:

$$F_X(t) = \Pr\{X \leq t\} = \int_{-\infty}^{t} f_X(y)dy \tag{1-10}$$

Η *συνάρτηση επιβίωσης (survival function,* Sf*)*, $\widetilde{F}_X(t)$, που είναι γνωστή σαν *αξιοπιστία (reliability)*, R(t), και στην οποία η τυχαία μεταβλητή είναι ο χρόνος T της επόμενης βλάβης του συστήματος ή εξαρτήματος, ορίζεται από τη σχέση:

$$\widetilde{F}_X(t) = R(t) = \Pr\{T > t\} = \int_{t}^{\infty} f_X(y)dy = 1 - F_X(t) \tag{1-11}$$

Συνήθως, ο δείχτης X που συμβολίζει την τυχαία μεταβλητή παραλείπεται. Με βάση τη σχ.(1-11), ισχύει:

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt} \tag{1-12}$$

Η *αναμενόμενη τιμή* ή *προσδοκία* (*expectation)* της μεταβλητής X είναι:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx \tag{1-13}$$

Η *συνάρτηση του ρυθμού βλαβών*, z(t), που δίνει το ρυθμό με τον οποίο συμβαίνουν οι βλάβες, ορίζεται από τη σχέση:

$$z(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{\Pr\{t < X \leq t + \Delta t \,|\, t < X\}}{\Delta t}$$

Με βάση τη σχ. (1-6) προκύπτει:

$$z(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{\Pr\{t < X \leq t + \Delta t\}}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\Pr\{t < X\}}$$

$$= \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{-\dfrac{dR(t)}{dt}}{R(t)} \tag{1-14}$$

Επομένως, είναι:

$$z(t) = -\frac{d\ln R(t)}{dt} \tag{1-15}$$

ή

$$d\ln R(t) = -z(t)dt \tag{1-16}$$

Η ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης, λαμβάνοντας R(t=0)=1, δίνει:

$$\ln R(t) = -\int_{0}^{t} z(x)dx \tag{1-17}$$

Συνεπώς, η έκφραση για την αξιοπιστία γράφεται:

$$R(t) = \exp\left\{-\int_0^t z(x)dx\right\} \tag{1-18}$$

Εξάλλου, από τις σχ.(1-14) και (1-17) προκύπτει για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :

$$f(t) = z(t) \cdot \exp\left\{-\int_0^t z(x)dx\right\} \tag{1-19}$$

1-6 ΠΙΘΑΝΟΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΒΛΑΒΩΝ

Γενικά, η επιλογή ενός πιθανοτικού μοντέλου για τους χρόνους βλαβών ενός εξαρτήματος ή συστήματος εξαρτάται από τους φυσικούς μηχανισμούς των βλαβών στους οποίους αυτό υπόκειται. Στα ηλεκτρονικά εξαρτήματα και συστήματα, το πλέον συνηθισμένο μοντέλο βλαβών περιγράφεται με την *εκθετική κατανομή*, διότι οι χρόνοι βλαβών τους ακολουθούν αυτήν ακριβώς την κατανομή.

Εκθετική Κατανομή

Η εκθετική κατανομή είναι μία μονοπαραμετρική συνεχής κατανομή με *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* που περιγράφεται από τη σχέση:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad 0 < t \leq +\infty \tag{1-20}$$

όπου, η παράμετρος λ αντιστοιχεί στο σταθερό ρυθμό βλαβών κατά τη διάρκεια της ωφέλιμης ζωής ενός εξαρτήματος ή συστήματος. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (Cdf) για την εκθετική κατανομή είναι:

$$F(t) = \int_0^t f(x)\, dx = 1 - e^{-\lambda t} \tag{1-21}$$

Επομένως, η αξιοπιστία με βάση τη σχ.(1-11) είναι:

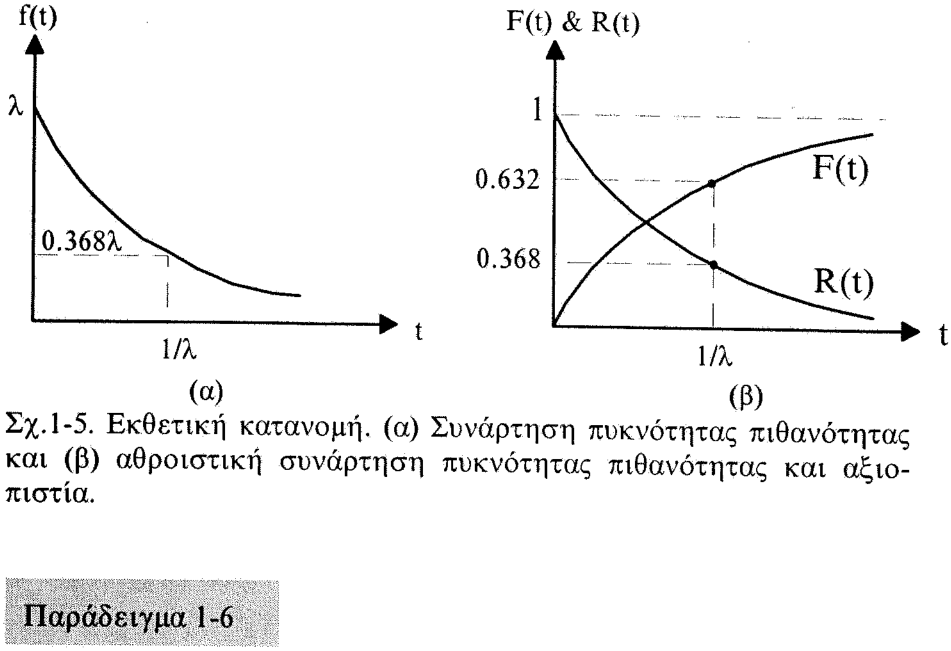
$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t} \tag{1-22}$$

Είναι φανερό, ότι η συνάρτηση του ρυθμού βλαβών για την εκθετική κατανομή είναι σταθερή:

$$z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda \tag{1-23}$$

Αυτό ακριβώς σημαίνει ότι κατά την ωφέλιμη περίοδο ζωής ενός εξαρτήματος, ο ρυθμός βλαβών του δεν εξαρτάται από το χρόνο λειτουργίας του. Η βλάβη του συμβαίνει όχι εξαιτίας της ηλικίας του (γήρανση), αλλά μόνο λόγω της τυχαίας ξαφνικής κατάρρευσής του. Στα Σχ.1-5(α)-(β) απεικονίζονται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η συνάρτηση αξιοπιστίας. Όπως φαίνεται, η πιθανότητα ενός εξαρτήματος να επιβιώσει για χρονικό διάστημα 1/λ ωρών, είναι:

$$R(1/\lambda) = e^{-\lambda\frac{1}{\lambda}} = e^{-1} = 0.368$$



Σχ.1-5. Εκθετική κατανομή. (α) Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και (β) αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και αξιοπιστία.

Παράδειγμα 1-6

Ο χρόνος ζωής T ενός ηλεκτρονικού εξαρτήματος είναι μία τυχαία μεταβλητή με εκθετική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, που δίνεται από τη σχέση:

$$f_T(t) = 0.002\exp\{-0.002t\}, \qquad t \geq 0$$

α) Να βρεθεί η πιθανότητα του εξαρτήματος να επιζήσει για 1000 ώρες.

β) Να βρεθεί η πιθανότητα επιβίωσης του εξαρτήματος για 1000 ώρες με την προϋπόθεση ότι έχει ήδη επιζήσει για 500 ώρες.

Λύση

Με βάση τη σχ.(1-22) είναι:

$$R = \exp\{-0.002x1000\} = e^{-2} = 0.135$$

Εξάλλου ισχύει:

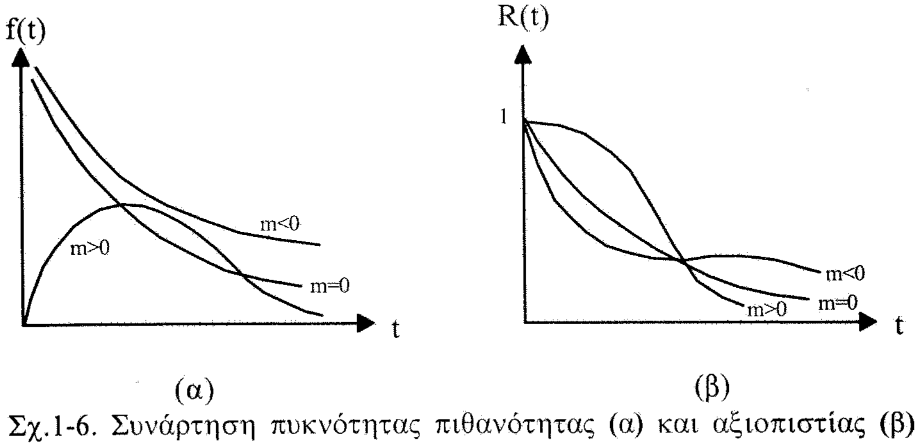
$$\Pr\{T \geq 1000 \mid T \geq 500\} = \frac{\Pr\{T \geq 500 \mid T \geq 1000\} x \Pr\{T \geq 1000\}}{\Pr\{T \geq 500\}}$$

$$= \frac{1x\Pr\{T \geq 1000\}}{\Pr\{T \geq 500\}} = \frac{e^{-2}}{e^{-1}} = 0.367$$

Κατανομή Weibull

Η κατανομή *Weibull* είναι γενικότερη της εκθετικής και μπορεί να περιγράψει τους χρόνους βλαβών και στις τρεις περιόδους της ζωής ενός εξαρτήματος. Η κατανομή αυτή είναι ένα χρήσιμο διπαραμετρικό μοντέλο, που συχνά χρησιμοποιείται για βλάβες οι οποίες προκαλούνται από καταπονήσεις, που υπερβαίνουν την αντοχή του ασθενέστερου μέρους ενός εξαρτήματος. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής *Weibull*, που φαίνεται στο Σχ.1-6, είναι:

$$f(x) = Kx^m \cdot e^{-K\frac{x^{m+1}}{m+1}} \tag{1-24}$$



Σχ.1-6. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (α) και αξιοπιστίας (β) της κατανομής *Weibull*.

Η παράμετρος m επηρεάζει τη μορφή της κατανομής, ενώ η παράμετρος K μπορεί να μεταβάλλει τη χρονική της κλίμακα. Στην ειδική περίπτωση όπου m=0, η κατανομή αυτή συμπίπτει με την εκθετική. Εξάλλου, για m=1, η κατανομή αυτή παρέχει ένα γραμμικά αυξανόμενο ρυθμό βλαβών. Γενικά, με την κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων m και K είναι δυνατό να προσεγγιστούν οι συναρτήσεις ρυθμού βλαβών διάφορων εξαρτημάτων ή συστημάτων.

Κατανομή Γάμμα

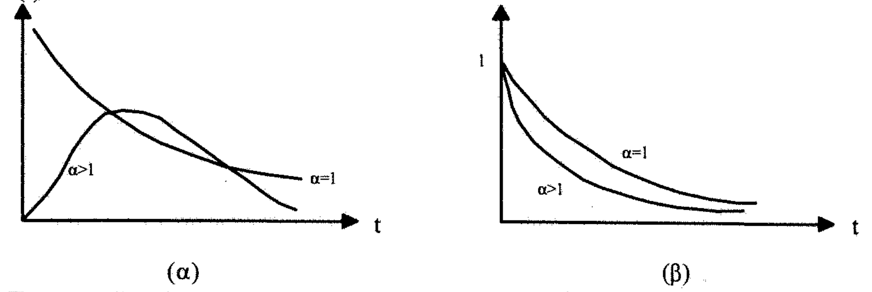
Η κατανομή γάμμα είναι χρήσιμη για εξαρτήματα στα οποία οι βλάβες δημιουργούνται εξαιτίας της επίδρασης μιας τυχαίας στιγμιαίας καταπόνησης *(shock)*. Ο βασικός μηχανισμός δημιουργίας αυτών των καταπονήσεων είναι τέτοιος ώστε: α) η ταυτόχρονη εμφάνιση καταπονήσεων να μην είναι δυνατή και β) οι χρόνοι εμφάνισης νέων καταπονήσεων να είναι ανεξάρτητοι των χρόνων εμφάνισης των προηγούμενων τους. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αυτής της διπαραμετρικής κατανομής, είναι:

$$f(x) = \frac{\gamma^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \cdot e^{-\gamma x} \qquad \alpha, \gamma, x > 0 \qquad (1\text{-}25)$$

με Γ(α) τη *συνάρτηση γάμμα* που είναι:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} dx = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \qquad (1\text{-}26)$$

Η παράμετρος α μεταβάλλει τη μορφή της κατανομής, ενώ η παράμετρος γ μεταβάλλει την κλίμακά της. Για α=1, η κατανομή γάμμα δίνει την εκθετική κατανομή με λ=γ. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής γάμμα φαίνεται στο Σχ. 1-7.



Σχ.1-7. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (α) και αξιοπιστίας (β) της κατανομής γάμμα.

Παράδειγμα 1-7

Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $z(t)=At^2$ μπορεί να χρησιμεύσει σαν συνάρτηση ρυθμού βλαβών ενός εξαρτήματος.

Λύση

Από τη σχ.(1-19), η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= z(t)\cdot\exp\left\{-\int_0^t z(x)dx\right\} \\
&= At^2\cdot\exp\left\{-A\int_0^t x^2dx\right\} \\
&= At^2\cdot\exp\left\{-\frac{At^3}{3}\right\}
\end{aligned}
$$

Η παραπάνω συνάρτηση αντιστοιχεί στην κατανομή *Weibull* με m=2 και K=A.

Διωνυμική Κατανομή

Η κατανομή αυτή, γνωστή και σαν κατανομή Bernoulli, είναι διακριτή με παραμέτρους n και p και μεταβλητή k. Αν p είναι η πιθανότητα επιτυχίας (q=1-p είναι η πιθανότητα αποτυχίας) ενός πειράματος με δύο δυνατές εκβάσεις (επιτυχία και αποτυχία), τότε η πιθανότητα k επιτυχιών σε n ανεξάρτητα πειράματα δίνεται από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας *(probability mass function, pmf)* της *διωνυμικής* κατανομής, που είναι:

$$B(k,n,p)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} \tag{1-27}$$

όπου,

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=C_k^n \tag{1-28}$$

είναι οι συνδυασμοί k αντικειμένων από n. Η εύρεση των συνδυασμών C_k^n μπορεί να γίνει και με το τρίγωνο του *Pascal*, που φαίνεται στο Σχ.1-8. Στο τρίγωνο αυτό κάθε αριθμός, εκτός του 1, είναι το άθροισμα των δύο αριθμών που βρίσκονται άνωθεν αυτού.

n	k	
0	0	1
1	0, 1	1 1
2	0, 1, 2	1 2 1
3	0, 1, 2, 3	1 3 3 1
4	0, 1, 2, 3, 4	1 4 6 4 1
5	0 - 5	1 5 10 10 5 1
6	0 - 6	1 6 15 20 15 6 1
7	0 - 7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	0 - 8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	0 - 9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Σχ.1-8. Εύρεση των συνδυασμών k-από-n με το τρίγωνο του *Pascal*.

Επομένως, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (Cdf) της κατανομής αυτής είναι:

$$P(k, n, p) = \sum_{i=0}^{k} B(i, n, p) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^{i} \cdot (1 - p)^{n-i} \qquad (1\text{-}29)$$

Όταν υπάρχουν περισσότερα από δύο δυνατά γεγονότα (καταστάσεις), που αναφέρονται σε μία διακριτή τυχαία μεταβλητή, τότε αντί της διωνυμικής ισχύει η ***πολυωνυμική (multinomial)*** συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Ας παρασταθεί με n ο συνολικός αριθμός των επαναλήψεων ενός πειράματος και με m το πλήθος των δυνατών εκβάσεων (αποτελεσμάτων) που μπορεί να προκύψουν από αυτό. Αν n_1, n_2, ..., n_m είναι οι αριθμοί των εμφανίσεων των m αποτελεσμάτων, τότε η πολυωνυμική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f(n_1, n_2, \cdots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m} \qquad (1\text{-}30)$$

όπου $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$, και p_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) είναι η πιθανότητα εμφάνισης του αποτελέσματος i.

Κατανομή Poisson

Μία τυχαία μεταβλητή που λαμβάνει τις τιμές 0, 1, 2,. . . , λέγεται ότι έχει *κατανομή Poisson* με παράμετρο λ αν για λ>0 ισχύει:

$$p(i) = \Pr\{X = i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0,1,2,\ldots \tag{1-31}$$

Η σχ.(1-31) ορίζει μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας διότι ισχύει:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1 \tag{1-32}$$

Μία σημαντική ιδιότητα της κατανομής *Poisson* είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσεγγίσει τη διωνυμική κατανομή όταν η παράμετρος n είναι μεγάλη και η πιθανότητα p μικρή. Έτσι λοιπόν αν X είναι μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους (n, p) και λ=np, τότε:

$$\Pr\{X = i\} = \frac{n!}{(n-i)!\,i!}p^i(1-p)^{n-i}$$

$$= \frac{n!}{(n-i)!\,i!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{n^i}\cdot\frac{\lambda^i}{i!}\cdot\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^i} \tag{1-33}$$

Για μεγάλες τιμές του n και πολύ μικρές τιμές της πιθανότητας p, ισχύουν:

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda} \tag{1-34}$$

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{n^i} \approx 1 \tag{1-35}$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i \approx 1 \tag{1-36}$$

Συνεπώς,

$$\Pr\{X = i\} \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \tag{1-37}$$

Παράδειγμα 1-8

Ο αριθμός των μεταβατικών σφαλμάτων (transient errors) που συμβαίνουν κάθε ημέρα σε μία μνήμη ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda=5$. Ποια είναι η πιθανότητα να μη συμβεί κανένα τέτοιο σφάλμα τη σημερινή ημέρα;

Λύση

Αν X είναι η τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει τον αριθμό των σφαλμάτων σε μία ημέρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\Pr\{X=0\}=e^{-\lambda}=e^{-5}\approx 0.006738$$

Παράδειγμα 1-9

Να υπολογιστεί η αναμενόμενη τιμή E[X], όπου X είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ.

Λύση

Είναι,

$$E[X]=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i\,e^{-\lambda}\lambda^{i}}{i!}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{i}}{(i-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

Παράδειγμα 1-10

Να δειχτεί ότι το άθροισμα δύο ανεξάρτητων μεταβλητών που ακολουθούν την κατανομή Poisson, με παραμέτρους λ_1 και λ_2 ακολουθεί επίσης την ίδια κατανομή.

Λύση

Για $0\le j\le n$, θα είναι:

$$\Pr\{X+Y=n\}=\sum_{j=0}^{n}\Pr\{X=j,Y=n-j\}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \Pr\{X = j\} \cdot \{Y = n - j\}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left(e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^j}{j!} \right) \cdot \left(e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-j}}{(n-j)!} \right)$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda_1^j \lambda_2^{n-j}}{j!(n-j)!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!\, \lambda_1^j \lambda_2^{n-j}}{j!(n-j)!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} (\lambda_1 + \lambda_2)^n$$

Από την τελευταία σχέση φαίνεται ότι το άθροισμα των μεταβλητών ακολουθεί την κατανομή Poisson.

Κανονική Κατανομή

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) μιας τυχαίας συνεχούς μεταβλητής που λέγεται ότι είναι *κανονικά* κατανεμημένη, είναι:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2\right\}, \quad -\infty < x < \infty \qquad (1\text{-}38)$$

όπου σ και μ είναι παράμετροι που ονομάζονται *μέση παρέκκλιση* και ***μέση τιμή*** αντίστοιχα. Η παραπάνω συνάρτηση αναφέρεται και σαν νόμος των *Laplace-deMoivre* και σαν συνάρτηση του Gauss. Δεδομένου ότι η συνάρτηση αυτή λαμβάνει μόνο θετικές τιμές, για να δειχτεί ότι πράγματι αποτελεί συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αρκεί να δειχτεί ότι το ολοκλήρωμά της από $-\infty$ ως ∞ ισούται με 1. Αν τεθεί $y=(x-\mu)/\sigma$, η ολοκλήρωση γίνεται:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy \qquad (1\text{-}39)$$

Αντί να δειχτεί ότι $I=1$, θα δειχτεί ότι $I^2=1$. Είναι λοιπόν:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy \right)^2$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}dy\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(y^2+z^2)}{2}\right\}dy\,dz \tag{1-40}$$

Με $r=\sqrt{y^2+z^2}$ και $\theta=\arctan(z/y)$ είναι $r dr d\theta = dy dz$. Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}r\,dr\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}r\cdot\exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}dr\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}r\cdot\exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}dr=1 \tag{1-41}$$

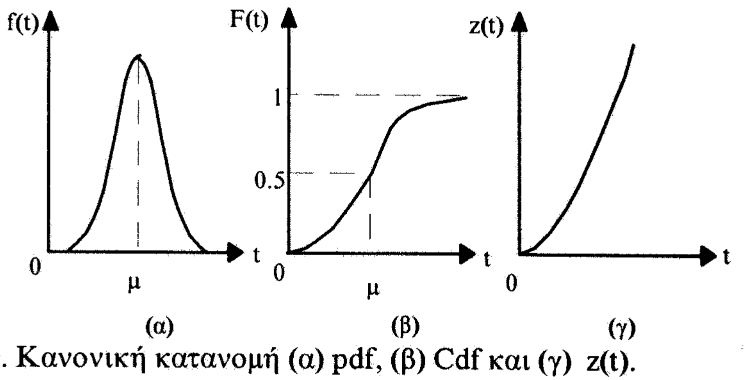
Η Cdf για την κατανομή αυτή είναι:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2}dy \tag{1-42}$$

Με την αντικατάσταση $z=(y-\mu)/\sigma$ η παραπάνω σχέση μπορεί να μετασχηματιστεί στην αποκαλούμενη *κανονικοποιημένη* ή *εναρμονισμένη* ή *τυποποιημένη* κανονική κατανομή:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma}e^{-z^2/2}dz \tag{1-43}$$

Το Σχ.1-9 δείχνει τις συναρτήσεις pdf, Cdf και z(t) για την κανονική κατανομή.



Σχ.1-9. Κανονική κατανομή (α) pdf, (β) Cdf και (γ) z(t).

Η κανονικοποιημένη μορφή της κανονικής κατανομής που δίνεται από τη σχ.(1-43) έχει μηδενική μέση τιμή και μοναδιαία μεταβλητότητα. Το άνω όριο της ολοκλήρωσης , έστω r, συνδέεται με τη μεταβλητή x με τη σχέση $x=\mu+r\sigma$. Για παράδειγμα, για r=2, η τιμή της Cdf λαμβάνεται στο σημείο $x=\mu+2\sigma$, δηλαδή είναι το εμβαδόν που ορίζεται κάτω από την κατανομή στο διάστημα $-\infty$ ως $+2\sigma$. Τιμές της κανονικοποιημένης κανονικής κατανομής δίνονται στον πίνακα 1.1.

Πίν. 1.1: Τιμές Κανονικοποιημένης Κανονικής Κατανομής Φ(x)

$\frac{X-\mu}{\sigma}$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5577	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6574	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99915	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99967	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983

Ολοκλήρωση με τον κανόνα του *Simpson*

Η τιμή της Cdf της κανονικοποιημένης κανονικής κατανομής σε κάθε σημείο μεταξύ $-\infty$ και $+\infty$ μπορεί να ληφθεί με τη χρησιμοποίηση του κανόνα ολοκλήρωσης του *Simpson*. Λόγω της συμμετρίας γύρω από τη μέση τιμή, μόνο το μισό της κατανομής είναι απαραίτητο να θεωρηθεί. Έτσι, είναι:

$$\Phi(x=\mu)=\Phi(z=0)=0.5$$

και

$$\Phi(x)=\Phi(0)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{(x-\mu)/\sigma} e^{-z^2/2}dz \qquad (1\text{-}44)$$

Έτσι, αν υποτεθεί ότι r=(x-μ)/σ=2, πρέπει να γίνει ο υπολογισμός:

$$\Phi(x=\mu+2\sigma)=0.5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^2 e^{-z^2/2}dz \qquad (1\text{-}45)$$

Αν r=-2, δηλαδή είναι x=μ-2σ, τότε ο υπολογισμός είναι:

$$\Phi(x=\mu-2\sigma)=1-\Phi(x=\mu+2\sigma)=0.5-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^2 e^{-z^2/2}dz \qquad (1\text{-}46)$$

Ο υπολογισμός γίνεται αφού πρώτα καθοριστούν οι τιμές της pdf στα σημεία z_i = i.Δh, όπου Δh είναι το βήμα ολοκλήρωσης και i = 0, 1, 2, .., n. Έστω ότι αυτές οι τιμές είναι οι f_i και αντιστοιχούν στα σημεία z_i. Η Cdf στο σημείο j είναι:

$$F_j=\frac{\Delta h}{3}\cdot(f_{j-2}+4f_{j-1}+f_j)+F_{j-2} \qquad (1\text{-}47)$$

όπου i = 2, 4, ..., n (άρτιος) και F_{j-2} είναι η τιμή της Cdf στο σημείο (j-2). Για j = 2, είναι:

$$F_2=\frac{\Delta h}{3}\cdot(f_0+4f_1+f_2)+F_0 \qquad (1\text{-}48)$$

Η τιμή της F_o, στην περίπτωση της κανονικοποιημένης κανονικής κατανομής, είναι ίση με 0.5. Το πρόγραμμα που ακολουθεί υπολογίζει το ολοκλήρωμα της κανονικής κατανομής, μεταξύ των ορίων XL (κάτω όριο) και XU (άνω όριο). Η παράμετρος CDFo (αντιστοιχεί στην F_0) είναι η τιμή του ολοκληρώματος στο κάτω όριο. Τιμές του κανονικού ολοκληρώματος, που υπολογίζονται από το πρόγραμμα, δίνονται στον πίνακα 1.2.

```
REM PROGRAM NORMAL CDF
REM-------------------------------------------
DECLARE SUB NormalCDF (Dh!, CDFo, XL!, XU!, CDF!)
CLS
PRINT SPC(15); "CALCULATION OF NORMAL INTEGRAL"
Dh = .01: CDF = 0!
XL = 0
CDFo = .5
```

```
    PRINT " x     Φ(x)"
    PRINT "-----------"
    FOR i = 1 TO 20
    XU = i * .1
    CALL NormalCDF(Dh, CDFo, XL, XU, CDF)
PrintCDF:
    PRINT USING "#.##   "; XU;
    PRINT USING ".#####"; CDF
    NEXT i
    END
    SUB NormalCDF (Dh, CDFo, XL, XU, CDF)
    DIM X1(1000), PDF(1000), Values(1000)
    N = 999
    R = 1! / SQR(2! * 3.14159)
    NN = N + 1
    FOR JJ = 1 TO NN
    FJ = JJ - 1
    X1(JJ) = FJ * Dh + XL
    PDF(JJ) = R * EXP(-X1(JJ) * X1(JJ) / 2!)
    IF X1(JJ) >= XU THEN GOTO Adj
    GOTO NextJJ
Adj:
    NNN = JJ
    i = INT(NNN / 2)
    II = i * 2
    IF II = NNN THEN GOTO NextJJ
    GOTO Cont
NextJJ:
    NEXT JJ
    PRINT "Increase N"
    EXIT SUB
Cont:
    NN = JJ
    Values(1) = CDFo
    FOR JJ = 3 TO NN STEP 2
    A = Values(JJ - 2)
    B = (PDF(JJ - 2) + 4! * PDF(JJ - 1) + PDF(JJ)) * Dh / 3
    Values(JJ) = A + B
    NEXT JJ
    CDF = Values(NN)
    EXIT SUB
    END SUB
```